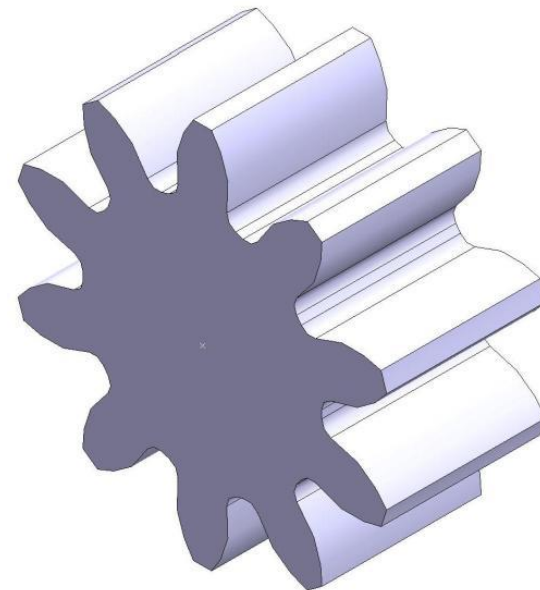
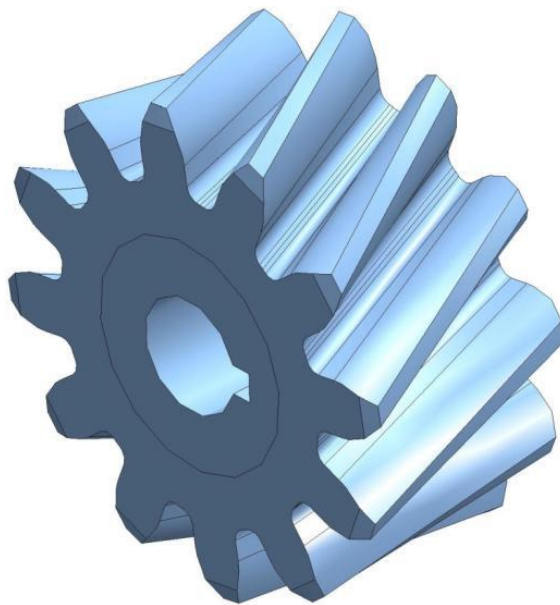


M3101b

Conception des transmissions de puissance

# Les Engrenages



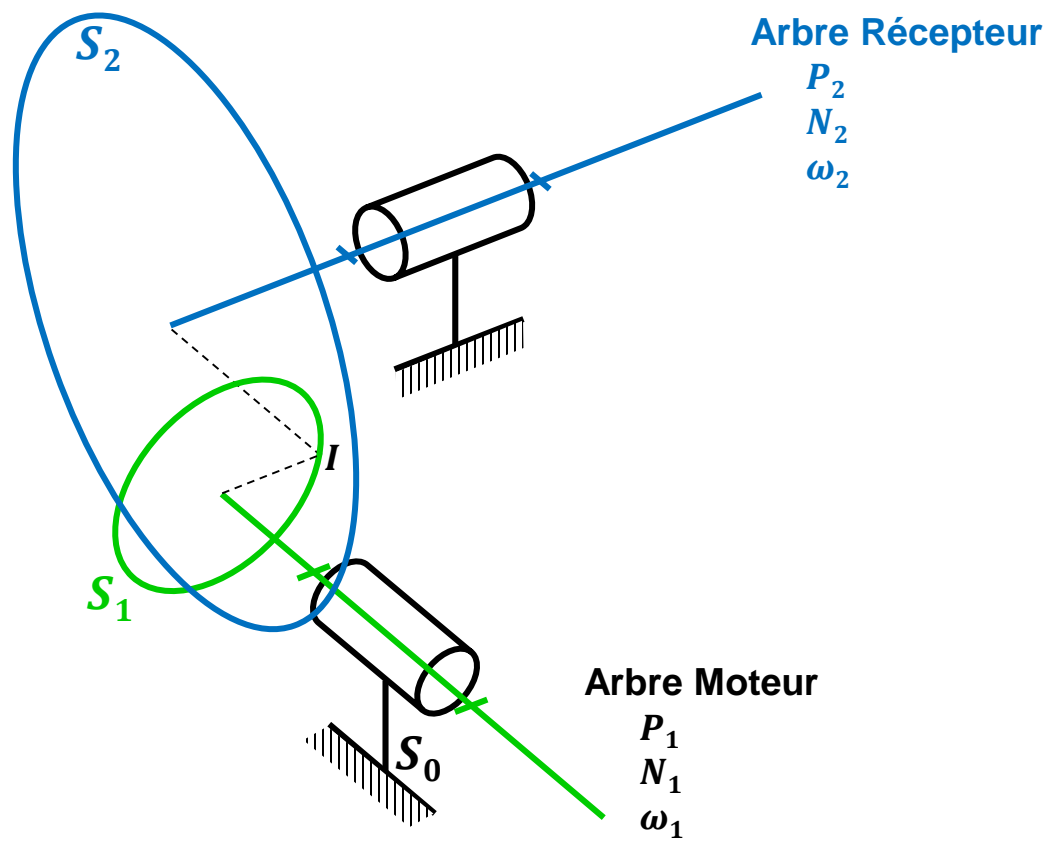
**Mathieu Rossat**

mathieu.rossat@univmed.fr  
www.mathieurossat.fr

Extrait du Programme Pédagogique Nationale 2013

<b>Conception des transmissions de puissance</b>	
<b>M3101</b>	Etudier les transmissions de puissance du point de vue architecture et énergétique. <b>M3101b</b>
	Choisir et intégrer des composants de guidage et de transmission. <b>M3101a</b>
	Connaître les principales familles de récepteurs et générateurs hydrauliques, pneumatiques, électriques et mécaniques. <b>M3101c</b>

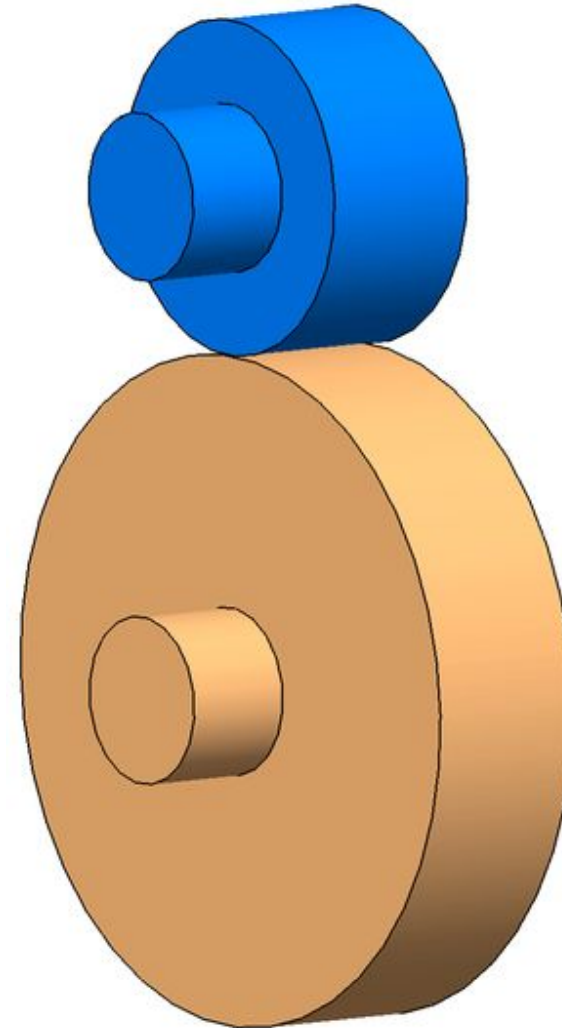
Il s'agit de transmettre une puissance mécanique entre l'arbre moteur et l'arbre récepteur. Ces deux arbres ont a priori une position relative quelconque.



Il est possible de réaliser cette transmission par des roues de friction.

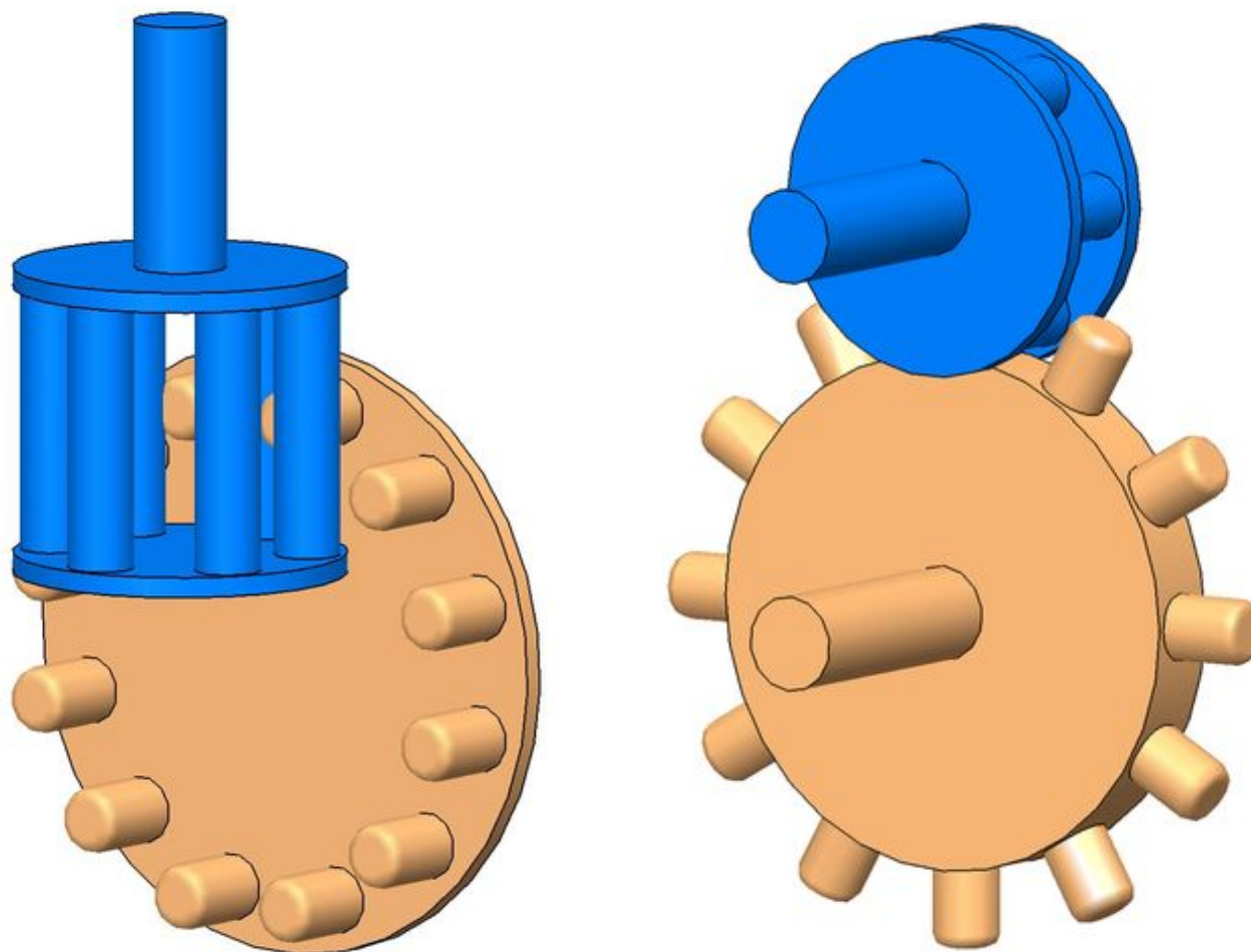
Cependant cette solution atteint rapidement ses limites. En effet, pour obtenir un roulement sans glissement et transmettre une puissance élevée, il est généralement nécessaire de créer une pression de contact supérieure aux pressions admissibles. De plus, les actions aux paliers deviennent très importants.

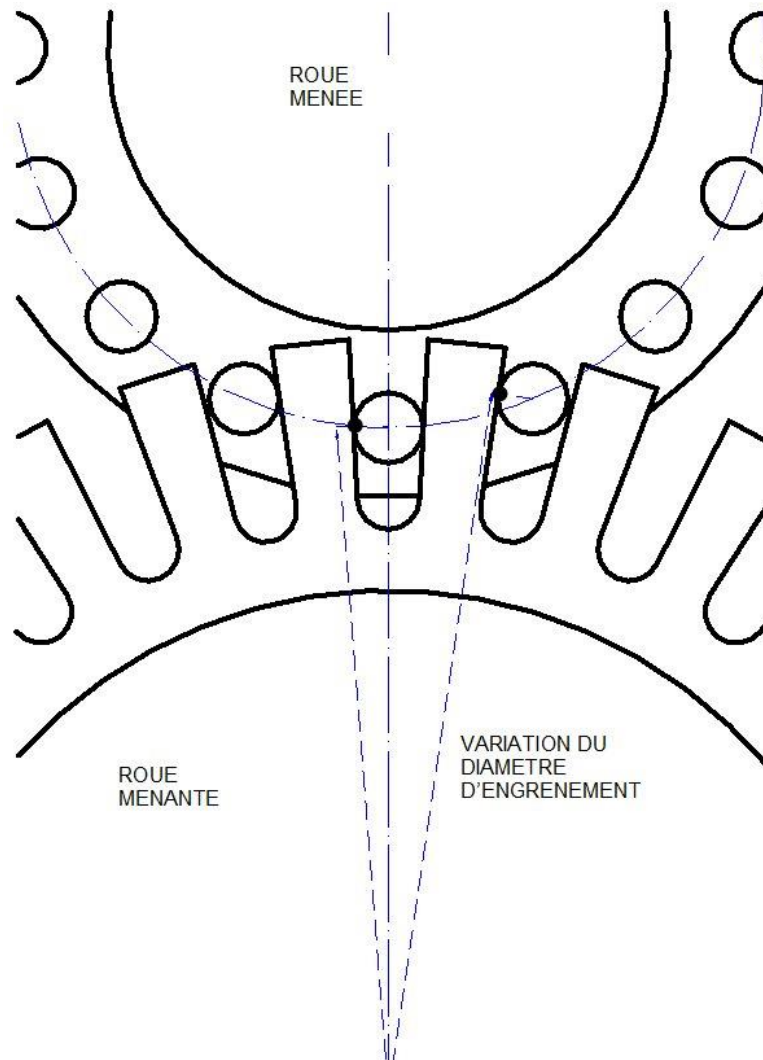
La solution des entraînements par obstacles présente alors un intérêt majeur.



**Exemple :** Transmission à axes parallèles

Léonard de Vinci dessinait déjà au XVème siècle des systèmes de transmission de puissance par obstacles. Voici leur principe :



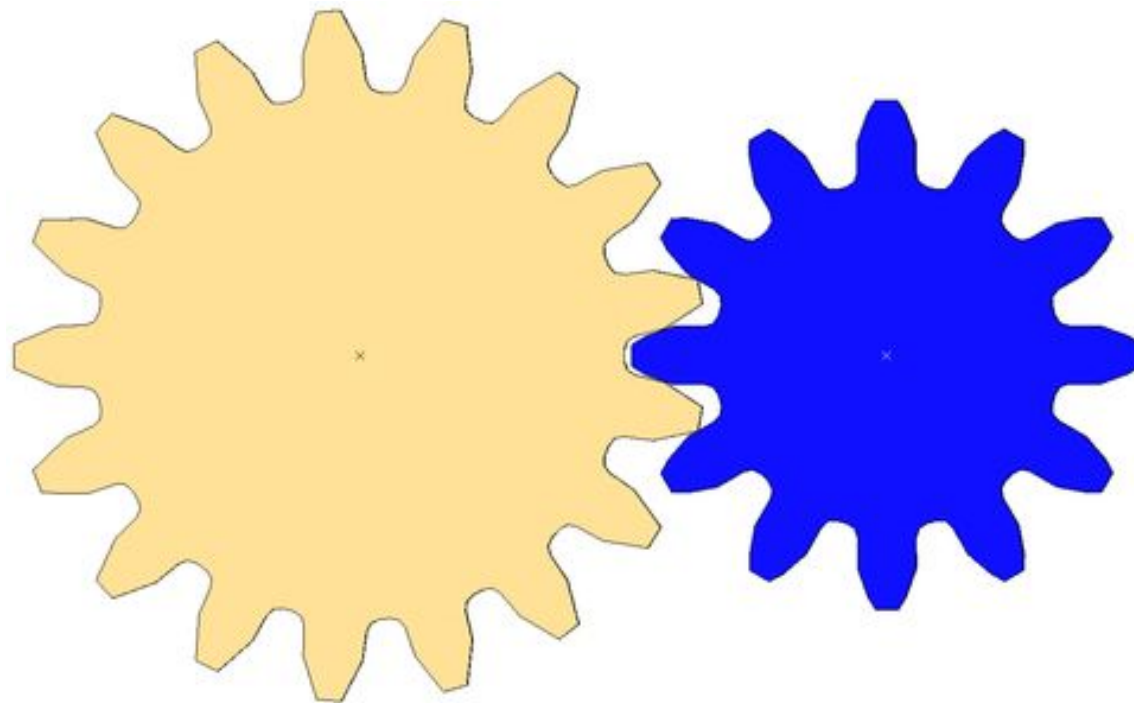


La variation du diamètre d'engrènement lors du fonctionnement implique une transmission de puissance non homocinéétique (vitesse de sortie non constante pour une vitesse d'entrée constante).

Le glissement important au niveau des contacts entre les plots et les rainures provoque une usure prématurée.

Cette solution n'est donc envisageable que dans le cas de faibles vitesses et d'efforts peu importants.

Les engrenages à denture en développante de cercle, objet de l'étude, permettent d'obtenir une transmission de puissance homocinéétique avec une réduction du glissement. L'usure au niveau des points de contact est grandement améliorée.

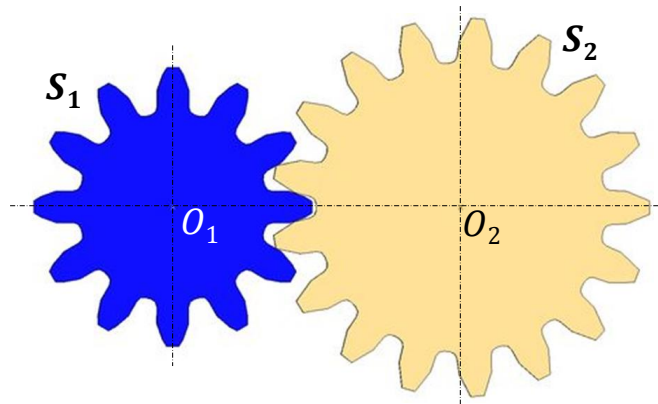


Ce cours se limite aux engrenages à axes parallèles.

# Etude géométrique et cinématique des engrenages droits à denture droite



Le centre instantané de rotation (CIR) du mouvement de  $S_1$  par rapport à  $S_2$  est caractérisé par un point unique  $I$  où la vitesse relative  $V_{I,S_1/S_2}$  est nulle. Où se situe ce point  $I$  particulier ?



Soient :

- $P_0$  le plan lié au bâti
- $P_1$  le plan moyen du pignon 1
- $P_2$  le plan moyen de la roue 2

Les centres instantanés de rotation sont les suivants :

- $I_{2/1} = I$  est le CIR de  $P_2/P_1$
- $I_{1/0}$  est le CIR de  $P_1/P_0$
- $I_{2/0}$  est le CIR de  $P_2/P_0$

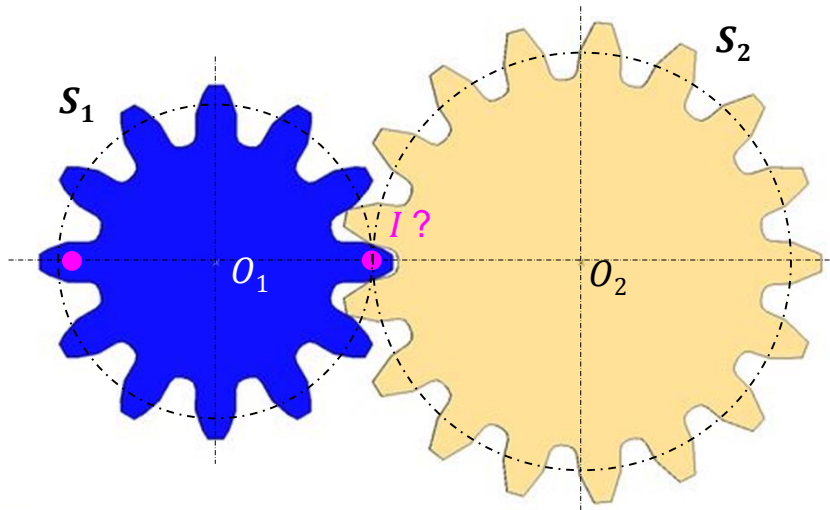
Le mouvement 1/0 (resp. 2/0) est une rotation autour d'un axe fixe  $O_1$  (resp  $O_2$ ) et dont la vitesse de rotation est  $\omega_{1/0}$  (resp.  $\omega_{2/0}$ ). Les CIR  $I_{1/0}$  et  $I_{2/0}$  sont fixes dans  $P_0$  :

- $I_{1/0} = O_1$
- $I_{2/0} = O_2$

## Propriété (Cours de cinématique) :

Si trois solides  $S_0, S_1$  et  $S_2$  sont en mouvement plan sur plan, alors les trois CIR sont alignés.

Ceci implique que  $I$  est situé sur la droite  $(O_1O_2)$ .



La position de  $I$  est fixe sur la droite  $(O_1O_2)$ .

Soient :

$$O_1I = r_1$$

$$O_2I = r_2$$

$r_1$  et  $r_2$  sont les rayons des cercles primitifs.

**Vitesses relatives du point  $I$  :**

$$\overrightarrow{V_{I,1/0}} = \overrightarrow{V_{O_1,1/0}} + \overrightarrow{IO_1} \wedge \overrightarrow{\Omega_{1/0}} = \vec{0} \pm r_1 \cdot \vec{x} \wedge \omega_{10} \cdot \vec{z} = \pm r_1 \cdot \omega_{10} \cdot \vec{y}$$

$$\overrightarrow{V_{I,2/0}} = \overrightarrow{V_{O_2,2/0}} + \overrightarrow{IO_2} \wedge \overrightarrow{\Omega_{2/0}} = \vec{0} \pm r_2 \cdot \vec{x} \wedge \omega_{20} \cdot \vec{z} = \pm r_2 \cdot \omega_{20} \cdot \vec{y}$$

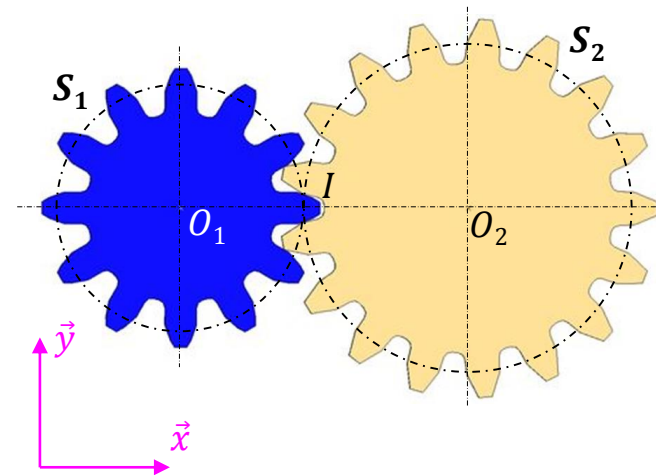
Puisque  $I$  est le CIR de 2/1 alors :

$$\overrightarrow{V_{I,2/1}} = \vec{0}$$

$$\overrightarrow{V_{I,2/0}} - \overrightarrow{V_{I,1/0}} = \vec{0}$$

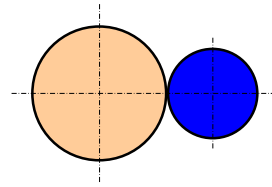
$$\boxed{r_1 \cdot \omega_{10} = \pm r_2 \cdot \omega_{20}}$$

$$\boxed{\frac{\omega_{10}}{\omega_{20}} = \pm \frac{r_2}{r_1}}$$



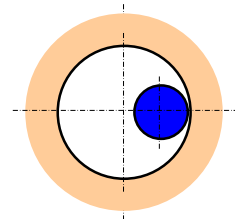
Cas de l'engrenage à contact extérieur :  $I$  est situé entre  $O_1$  et  $O_2$

$$r_1 \cdot \omega_{10} = -r_2 \cdot \omega_{20}$$



Cas de l'engrenage à contact intérieur :  $I$  est situé à l'extérieur de  $O_1$  et  $O_2$

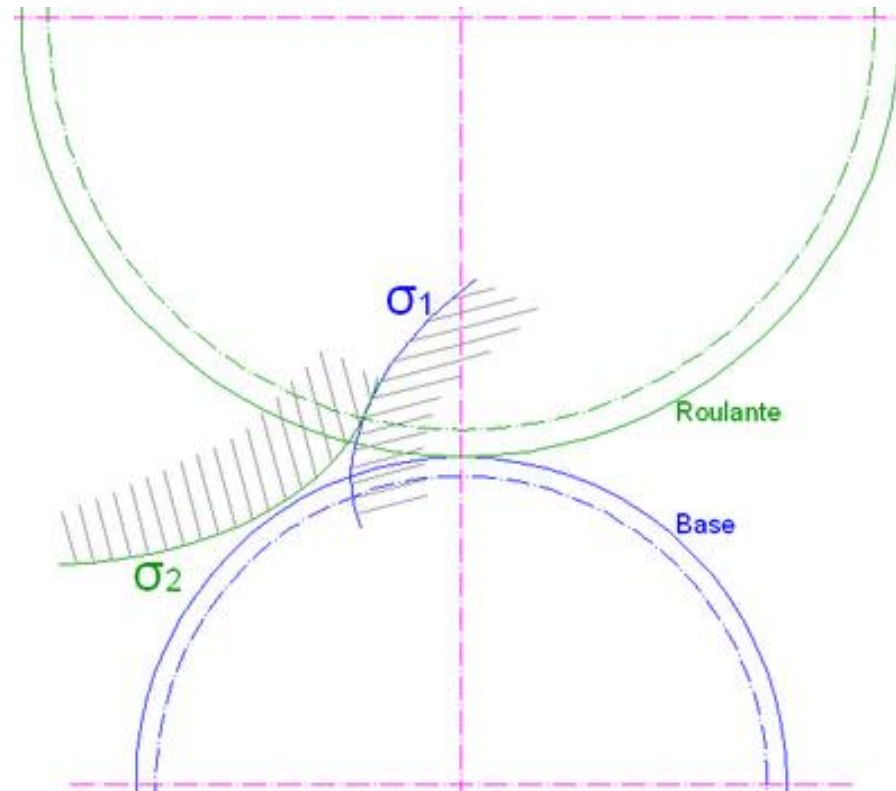
$$r_1 \cdot \omega_{10} = +r_2 \cdot \omega_{20}$$



Le rapport de vitesse n'est lié qu'aux rayons  $r_1$  et  $r_2$ . Cette relation montre la possibilité de transmettre le mouvement par des roues de friction. Mais les limites de celles-ci vis-à-vis des pressions admissibles conduits aux solutions de transmission par obstacles.

L'obstacle entre les solides  $S_1$  et  $S_2$  est réalisé par deux profils enveloppes, respectivement,  $\sigma_1$  et  $\sigma_2$ .

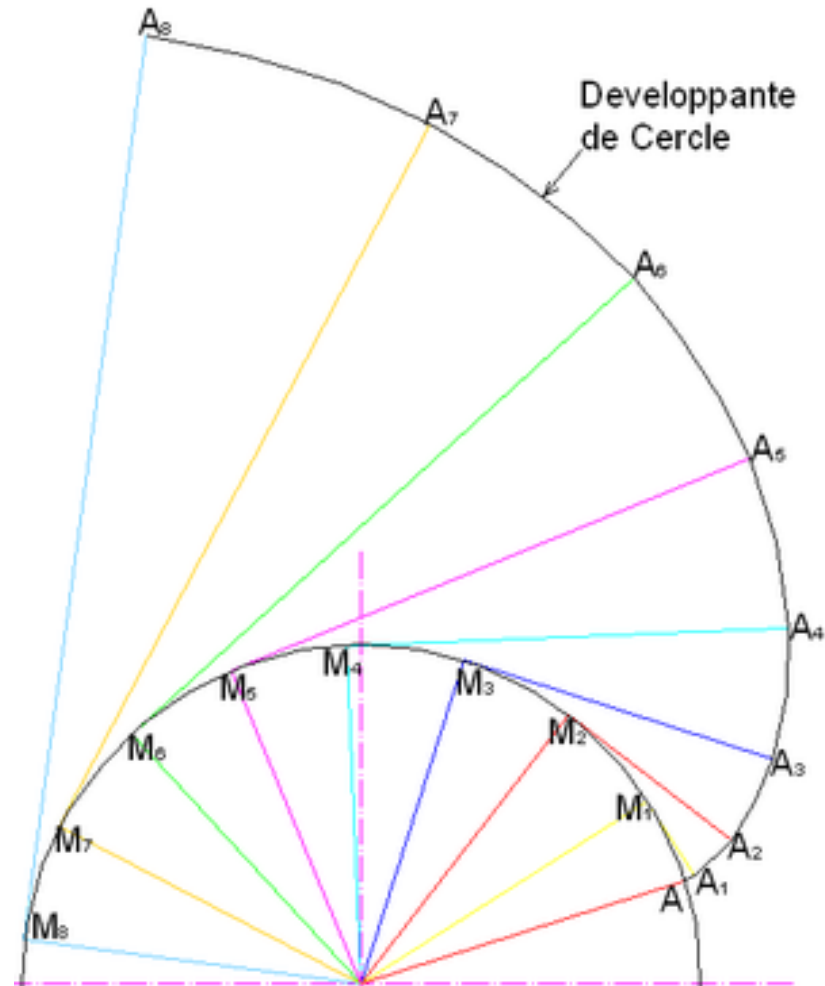
Au cours de l'engrènement le profil  $\sigma_2$  est l'enveloppe du profil  $\sigma_1$  dans le mouvement relatif de 2/1. Les deux profils sont appelés « profils conjugués de denture ». Ils roulent et glissent l'un sur l'autre.



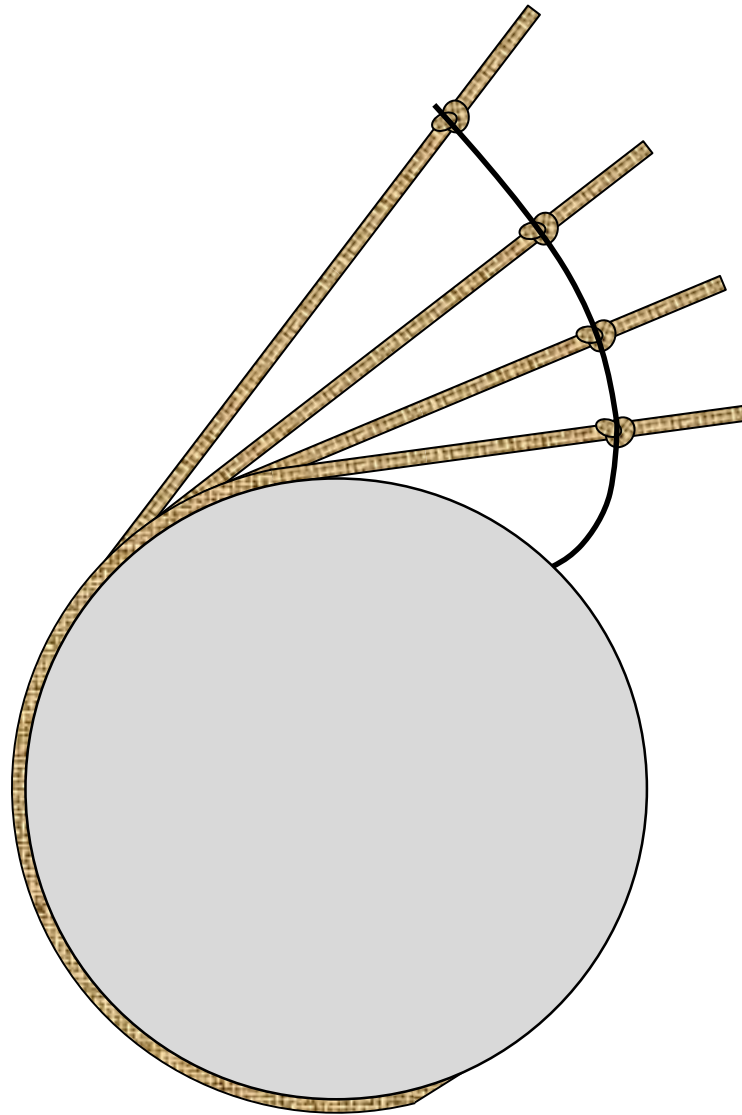
**Tracé** : Une droite ( $D$ ) tangente à un cercle, dit cercle de base, roule sans glisser sur ce cercle. Les points  $A_i$  fixes sur la tangente décrivent les positions successives du point  $A$ .

**Propriétés** : Soit  $M$  le point de tangence entre ( $D$ ) et le cercle de base. La développante de cercle est l'ensemble des points  $A_i$  tels que :

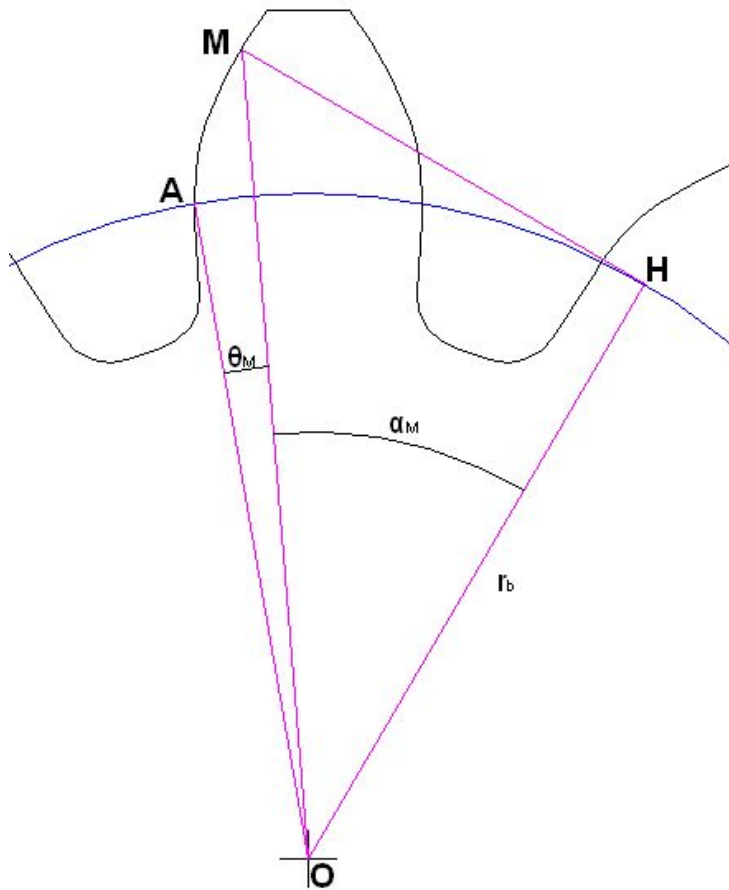
- la longueur de l'arc  $\widehat{M_i A}$  est égale à  $M_i A_i$
- Les droites ( $M_i A_i$ ) sont tangentes au cercle en  $M_i$
- Les droites ( $M_i A_i$ ) sont perpendiculaires à la tangente à la développante de cercle au point  $A_i$
- $M_i$  est le CIR du mouvement de ( $D$ ) sur le cercle de base



Il est possible de faire l'analogie en déroulant une corde sur un tambour et en observant la trajectoire d'un nœud.



L'étude des engrenages à développante de cercle nécessite l'utilisation d'une nouvelle fonction : la fonction involute.



## Démonstration :

Les propriétés de la développante de cercle précisent que la longueur de l'arc de cercle AH (pris sur le cercle de base) est égale à la longueur du segment MH.

$$\widehat{AH} = MH$$

$$r_b \cdot (\theta_M + \alpha_M) = r_b \cdot \tan(\alpha_M)$$

$$\theta_M + \alpha_M = \tan(\alpha_M)$$

$$\theta_M = \tan(\alpha_M) - \alpha_M$$

L'angle particulier  $\theta_M$  est l'involute de l'angle complémentaire  $\alpha_M$ :

$$\theta_M = \text{inv}(\alpha_M) = \tan(\alpha_M) - \alpha_M$$



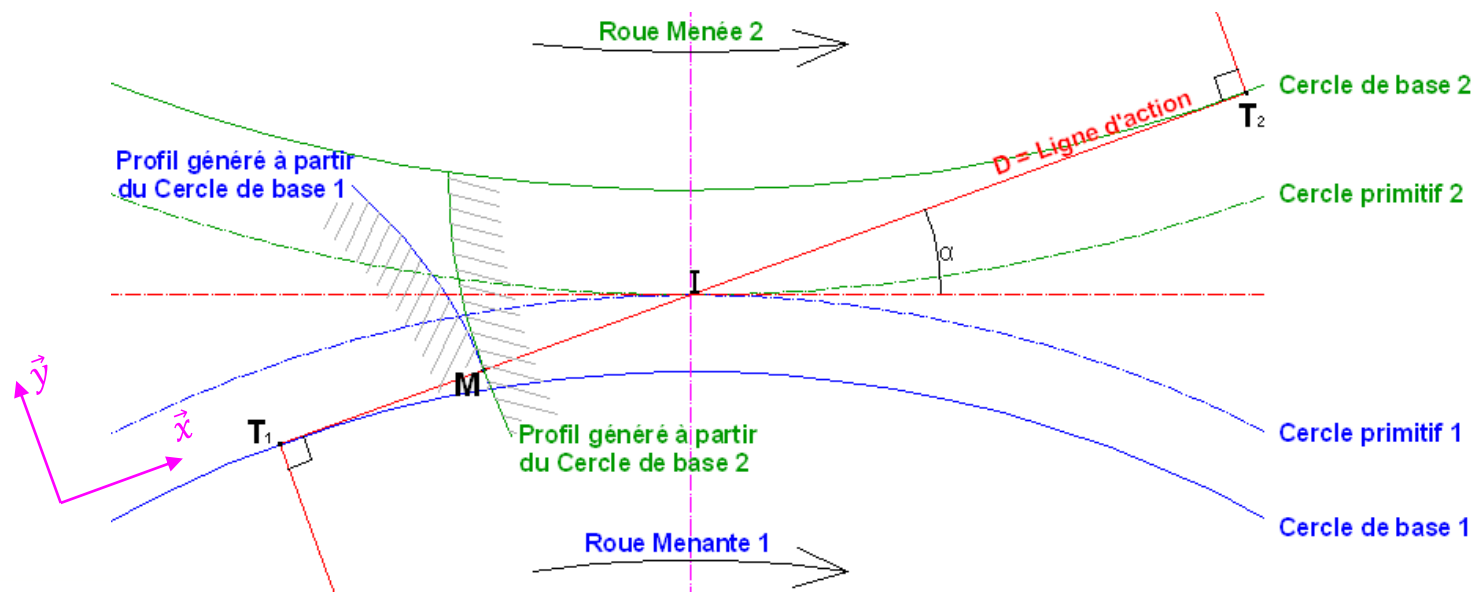
Cette fonction n'est pas inversible. Il n'existe pas de fonction  $inv^{-1}$ . Il faut utiliser le tableau de valeurs d'involute.

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																															
0.014904	0.017345	0.020054	0.023049	0.026350	0.029973	0.033927	0.038211	0.042835	0.047811	0.053149	0.058851	0.064926	0.071374	0.078205	0.085427	0.093051	0.101087	0.109545	0.118426	0.127739	0.137485	0.147674	0.158315	0.169408	0.180964	0.193084	0.205767	0.219014	0.232825	0.247201	0.262142	0.277649	0.293722	0.310361	0.327566	0.345337	0.363674	0.382577	0.402046	0.422081	0.442683	0.463854	0.485595	0.507907	0.530791	0.554248	0.578279	0.602884	0.628064	0.653819	0.680150	0.707057	0.734541	0.762601	0.791236	0.820447	0.850224	0.880567	0.911476	0.942951	0.975																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																			
0															0.014904															0.017345															0.020054															0.023049															0.026350															0.029973															0.033927															0.038211															0.042835															0.047811															0.053149															0.058851															0.064926															0.071374															0.078205															0.085427															0.093051															0.101087															0.109545															0.118426															0.127739															0.137485															0.147674															0.158315															0.169408															0.180964															0.193084															0.205767															0.219014															0.232825															0.247201															0.262142															0.277649															0.293722															0.310361															0.327566															0.345337															0.363674															0.382577															0.402046															0.422081															0.442683															0.463854															0.485595															0.507907															0.530791															0.554248															0.578279															0.602884															0.628064															0.653819															0.680150															0.707057															0.734541															0.762601															0.791236															0.820447															0.850224															0.880567															0.911476															0.942951															0.975														

Extrait du tableau d'involute

L'engrènement est réalisé à partir de deux profils en développante de cercle conjugués bâtis sur les solides  $S_1$  et  $S_2$ .

- La droite ( $D$ ) roule sans glisser sur les cercles de base  $Cb_1$  et  $Cb_2$
- $T_1$  (resp.  $T_2$ ) est le CIR du mouvement de la droite ( $D$ ) sur  $Cb_1$  (resp.  $Cb_2$ )
- $(T_1T_2)$  est appelée **ligne d'action**
- Les profils générés à partir de  $Cb_1$  et  $Cb_2$  sont en contact en  $M$
- $M$  décrit un segment de la droite  $(T_1T_2)$  au cours du mouvement de 2/1
- $I$  est le point de contact entre les deux cercles primitifs  $C_1$  et  $C_2$
- $I$  est le CIR du mouvement de 2/1



Vitesse de  $T_1$  :

$$\overrightarrow{V_{T_1,D/0}} = \overrightarrow{V_{T_1,D/1}} + \overrightarrow{V_{T_1,1/0}}$$

$$\overrightarrow{V_{T_1,D/1}} = \vec{0} \text{ car } T_1 \text{ est le CIR du mouvement de } D/1$$

$$\overrightarrow{V_{T_1,1/0}} = \overrightarrow{T_1 O_1} \wedge \overrightarrow{\Omega_{1/0}} = r_1 \cdot \omega_{10} \cdot \vec{x} = \overrightarrow{V_{T_1,D/0}}$$

De même, la vitesse de  $T_2$  :

$$\overrightarrow{V_{T_2,D/0}} = \overrightarrow{V_{T_2,2/0}} = r_2 \cdot \omega_{20} \cdot \vec{x}$$

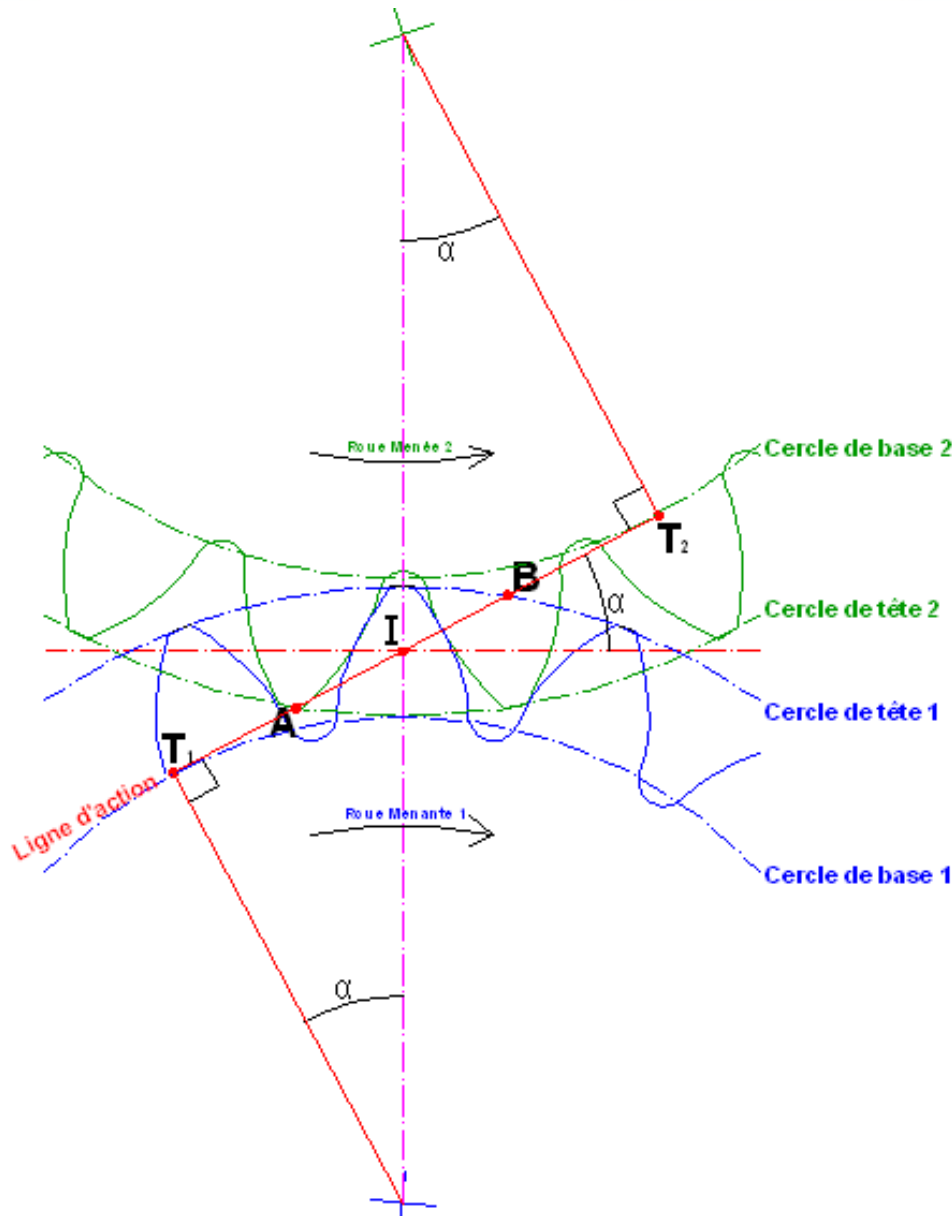
or (diapo 10)  $r_1 \cdot \omega_{10} = \pm r_2 \cdot \omega_{20}$  donc :

$$\overrightarrow{V_{T_1,D/0}} = \overrightarrow{V_{T_2,D/0}}$$

Ceci est valable quelque soit le point M sur la ligne d'action (Démonstration ultérieure).

$$\overrightarrow{V_{T_1,D/0}} = \overrightarrow{V_{T_2,D/0}} = \overrightarrow{V_{M,D/0}}$$

**La transmission est homocinétique**



Pour une rotation suivant le sens horaire de la roue menante :

- $A$  est la début de contact entre un couple de dents à profils conjugués
- $B$  est la fin de contact entre le même couple de dents à profils conjugués

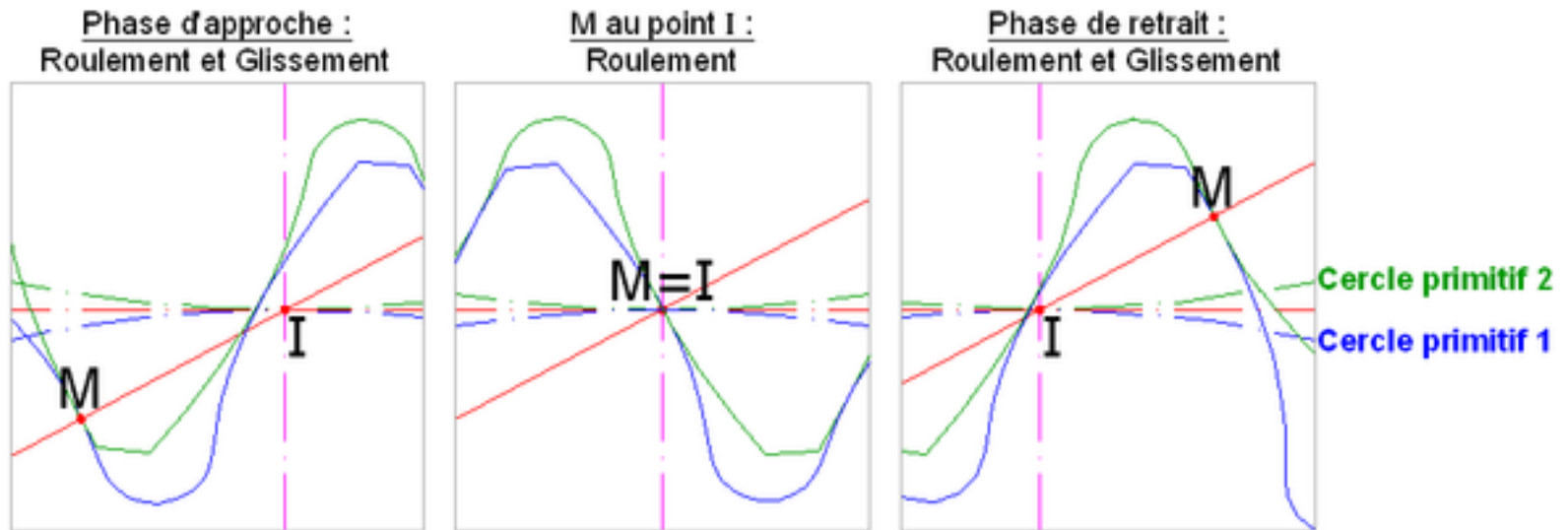
$A$  et  $B$  sont les intersections des cercles de tête avec la ligne d'action.

Le point de contact des profils de denture décrit le segment  $[AB]$  où  $[AI]$  est le segment d'approche et  $[IB]$  le segment de retrait.

Les deux développantes de cercles sont conjuguées, il y a donc roulement et glissement des deux profils.

Soit  $M$  un point de la ligne d'action  $(T_1 T_2)$ . L'analyse de la vitesse de glissement  $\overrightarrow{V}_{M,2/1}$  montre trois phases :

- Dans la phase d'approche et dans celle de retrait, les deux profils glissent l'un par rapport à l'autre. C'est le **glissement spécifique**. Ceux-ci diminuent le rendement.
- Quand  $M$  est en  $I$ , il y a roulement sans glissement.



Calcul de la vitesse de glissement :

$$\overrightarrow{V_{M,2/1}} = \overrightarrow{V_{I,2/1}} + \overrightarrow{MI} \wedge \overrightarrow{\Omega_{2/1}}$$

La vitesse  $\overrightarrow{V_{I,2/1}}$  est nulle (Roulement pur).

$$\overrightarrow{V_{M,2/1}} = \overrightarrow{MI} \wedge \overrightarrow{\Omega_{2/1}} = \overrightarrow{MI} \wedge (\overrightarrow{\Omega_{2/0}} - \overrightarrow{\Omega_{1/0}})$$

Engrenages à contact extérieur :

$$V_{M,2/1} = MI \times (\omega_{20} + \omega_{10})$$

Engrenages à contact intérieur :

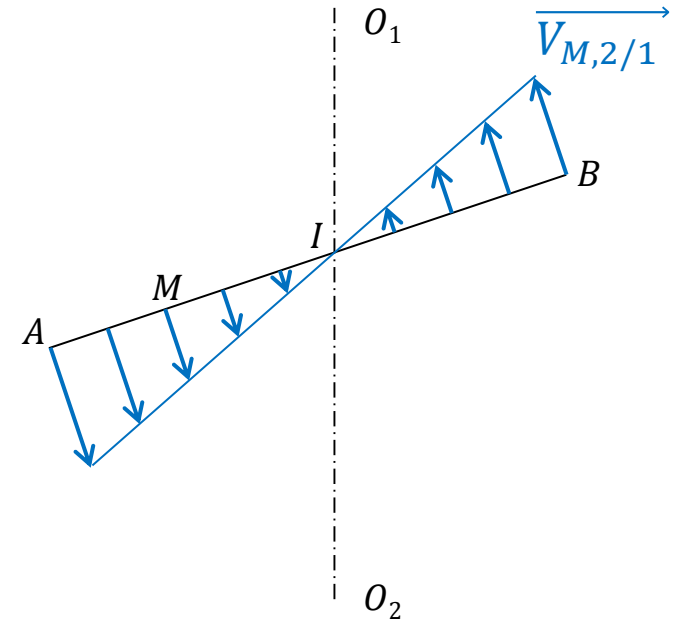
$$V_{M,2/1} = MI \times (\omega_{20} - \omega_{10})$$

Cas particuliers du point M en I :

$$V_{M,2/1} = 0$$

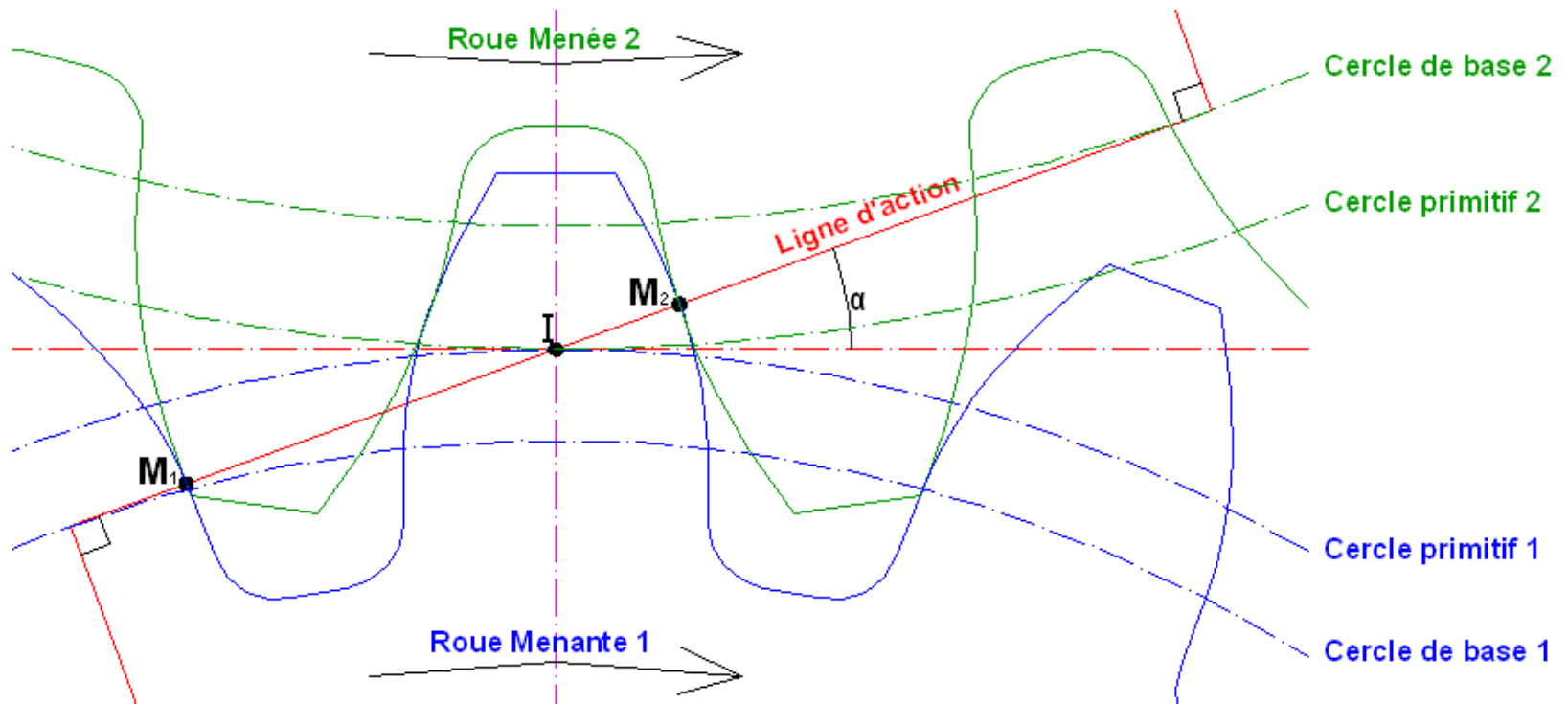
## Conclusions

Plus le point  $M$  est loin de  $I$ , plus le glissement spécifique est grand. Il est pas souvent différent entre la phase d'approche et de celle de retrait. Pour répartir l'usure, les glissements spécifiques peuvent être équilibrés.



Au cours de l'engrènement, le point  $M$  de contact entre les profils  $\sigma_1$  et  $\sigma_2$  se déplace sur la ligne d'action. (Sur le schéma ci-dessous, deux dents sont en prise en même temps : en  $M_1$  et en  $M_2$ ).

La ligne d'action est inclinée d'un angle  $\alpha$  par rapport au plan tangent en  $I$ . Cette ligne passe par  $I$ . L'angle  $\alpha$ , appelé **angle de pression**, peut être différent entre le taillage et le fonctionnement. L'angle de pression de taillage vaut généralement  $20^\circ$ . Il est noté  $\alpha_0$ .



Le cercle primitif est l'élément de référence. Le diamètre primitif est noté  $d$ .

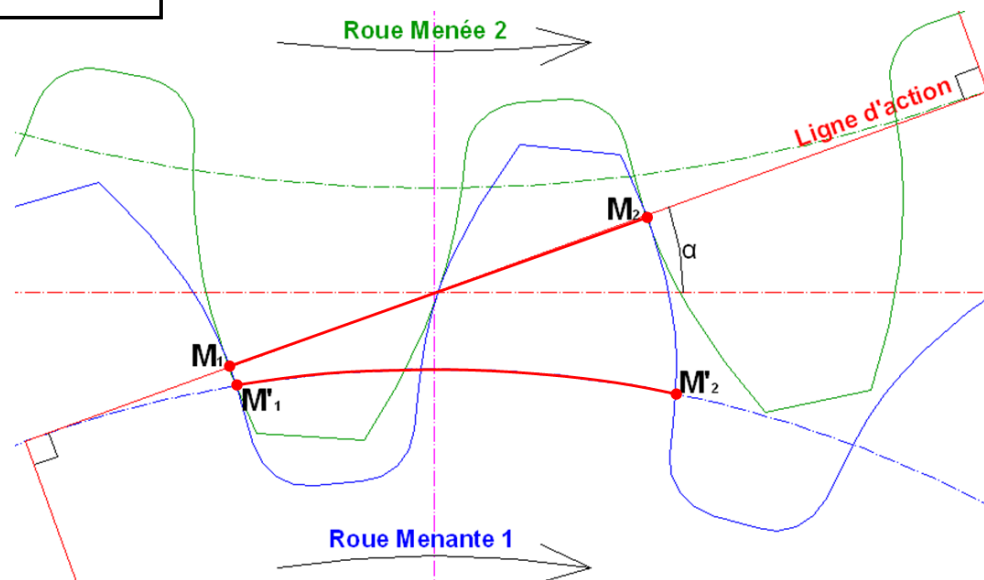
Le pas primitif, noté  $p$ , est la longueur de l'arc du cercle primitif prise entre deux développantes consécutives.

Le périmètre du cercle primitif peut s'exprimer par le produit du nombre de dent  $Z$  et du pas primitif :

$$p\acute{e}rim\grave{e}tre = Z \cdot p$$

Le pas de base, noté  $p_b$ , est la distance  $M_1M_2$  séparant deux profils sur la droite d'action ( $T_1T_2$ ). C'est aussi la longueur de l'arc  $M'_1M'_2$  séparant deux profils successifs sur le cercle de base.

$$p_b = p \cdot \cos\alpha$$





Le périmètre c'est aussi  $\pi \cdot d$  donc  $\pi \cdot d = Z \cdot p$

$$d = \frac{Z \cdot p}{\pi}$$

Par définition, le **module** de l'engrenage, noté  $m$  (unité en  $mm$ ), est donné par la relation :

$$m = \frac{p}{\pi}$$

Ainsi, en fonctionnement :

$$d = m \cdot Z$$

et au taillage :

$$d_0 = m_0 \cdot Z$$

**Les caractéristiques d'une dent sont fonction du module de taillage  $m_0$  et de l'angle de pression de taillage  $\alpha_0$ .**

Valeurs normalisées du module de taillage $m_0$									
Valeurs principales en mm					Valeurs secondaires en mm				
0,06	0,25	1,25	5	20	0,07	0,28	1,125	5,5	22
0,08	0,30	1,5	6	25	0,09	0,35	1,375	7	28
0,10	0,40	2	8	32	0,11	0,45	1,75	9	36
0,12	0,50	2,5	10	40	0,14	0,55	2,75	11	45
0,15	0,75	3	12	50	0,18	0,7	3,5	14	55
0,20	1,0	4	16	60	0,22	0,9	4,5	18	70

**Pour que l'engrènement entre une roue et un pignon soit possible, ils doivent avoir le même module.**

**Objectif :** Déterminer l'expression de l'épaisseur curviligne  $s_M$  de la dent prise sur un cercle de diamètre  $d_M$  en fonction de l'épaisseur curviligne  $s$  de la dent prise sur le cercle primitif.

Epaisseur curviligne sur le cercle de base :

$$s_b = d_b \cdot (\overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OB})$$

$$(\overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OB}) = \frac{s_b}{d_b}$$

Epaisseur curviligne en  $M$  :

$$s_M = 2 \cdot \widehat{BM}$$

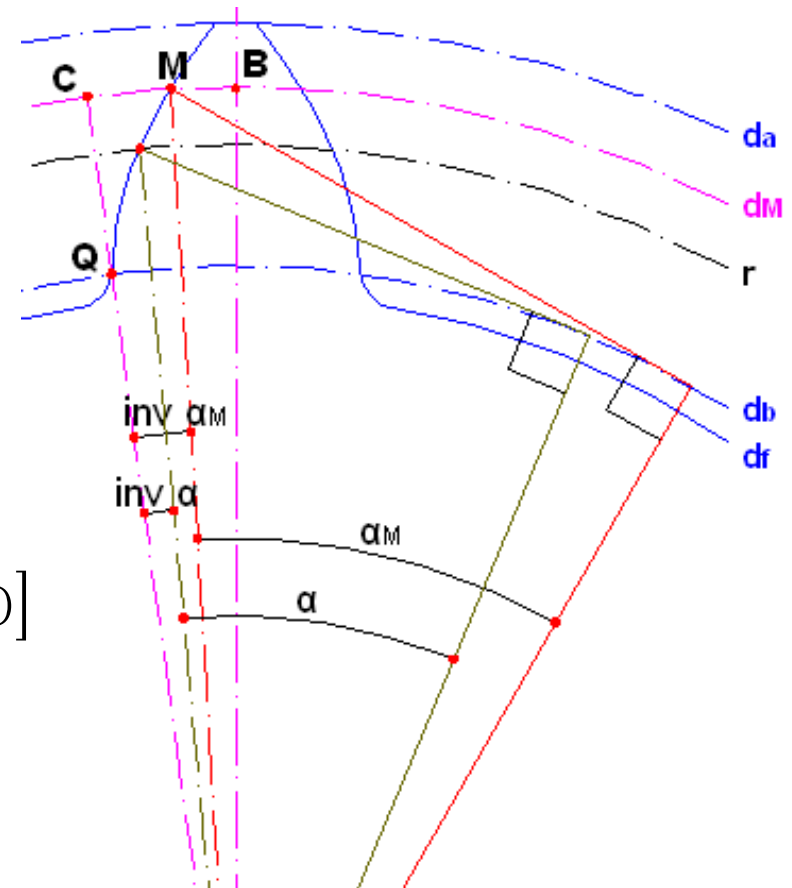
$$s_M = 2 \cdot (\widehat{BC} - \widehat{MC})$$

$$s_M = 2 \cdot \left[ \frac{d_M}{2} \cdot (\overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OB}) - \frac{d_M}{2} \cdot \text{inv}(\alpha_M) \right]$$

$$s_M = s_b \cdot \frac{d_M}{d_b} - d_M \cdot \text{inv}(\alpha_M) \quad (1)$$

Sur le cercle primitif par exemple :

$$s_0 = s_b \cdot \frac{d}{d_b} - d_0 \cdot \text{inv}(\alpha_0) \quad (2)$$



Par combinaison des relations (1) et (2) :

$$s_M = d_M \cdot \left[ \frac{s_0}{d_0} + \text{inv}(\alpha_0) - \text{inv}(\alpha_M) \right]$$

C'est l'épaisseur curviligne en tout point de la développante de cercle en fonction de l'épaisseur curviligne sur le cercle primitif.

## Intérêt

Pour que la dent est une résistance suffisante, il est recommandé d'avoir une épaisseur sur le diamètre de tête supérieure à  $0,2 \times m$ . Sur le cercle de tête, cette relation devient :

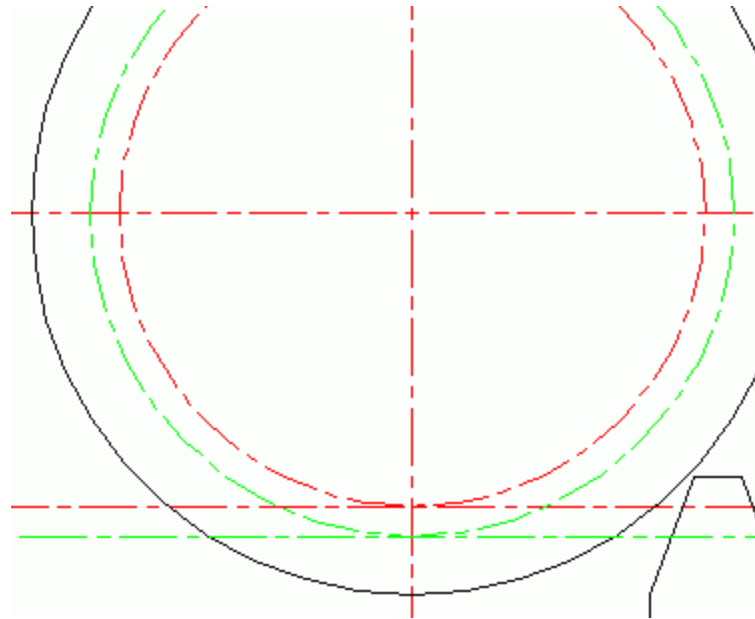
$$s_{r_a} = d_a \cdot \left[ \frac{s_0}{d_0} + \text{inv}(\alpha_0) - \text{inv}(\alpha_{r_a}) \right]$$

avec

$$\alpha_{r_a} = \arccos \left( \frac{r_b}{r_a} \right)$$

Il y a plusieurs techniques de taillage :

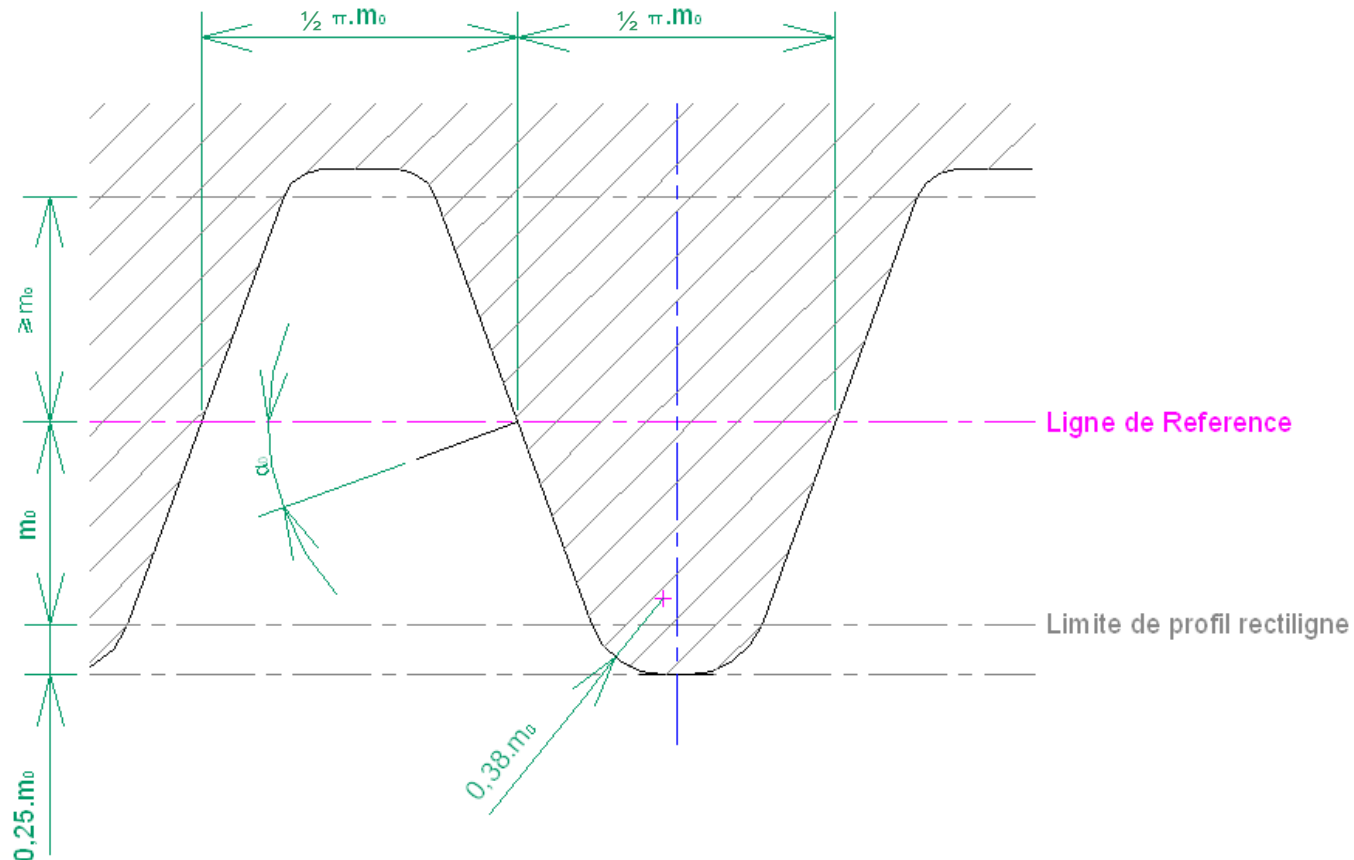
- Une des roues de l'engrenage est transformée en outil de taillage. En plus du mouvement d'engrènement, il y a un mouvement de coupe alternatif (enlèvement de matière). C'est le taillage par outil pignon.
- Une des roues de l'engrenage a un diamètre primitif qui tend vers l'infini. Ce cercle primitif devient un plan primitif. Le pignon de taillage devient alors une crémaillère de taillage. (Méthode la plus employée).



*Image Source : Kaboldy*  
GNU Free Documentation License

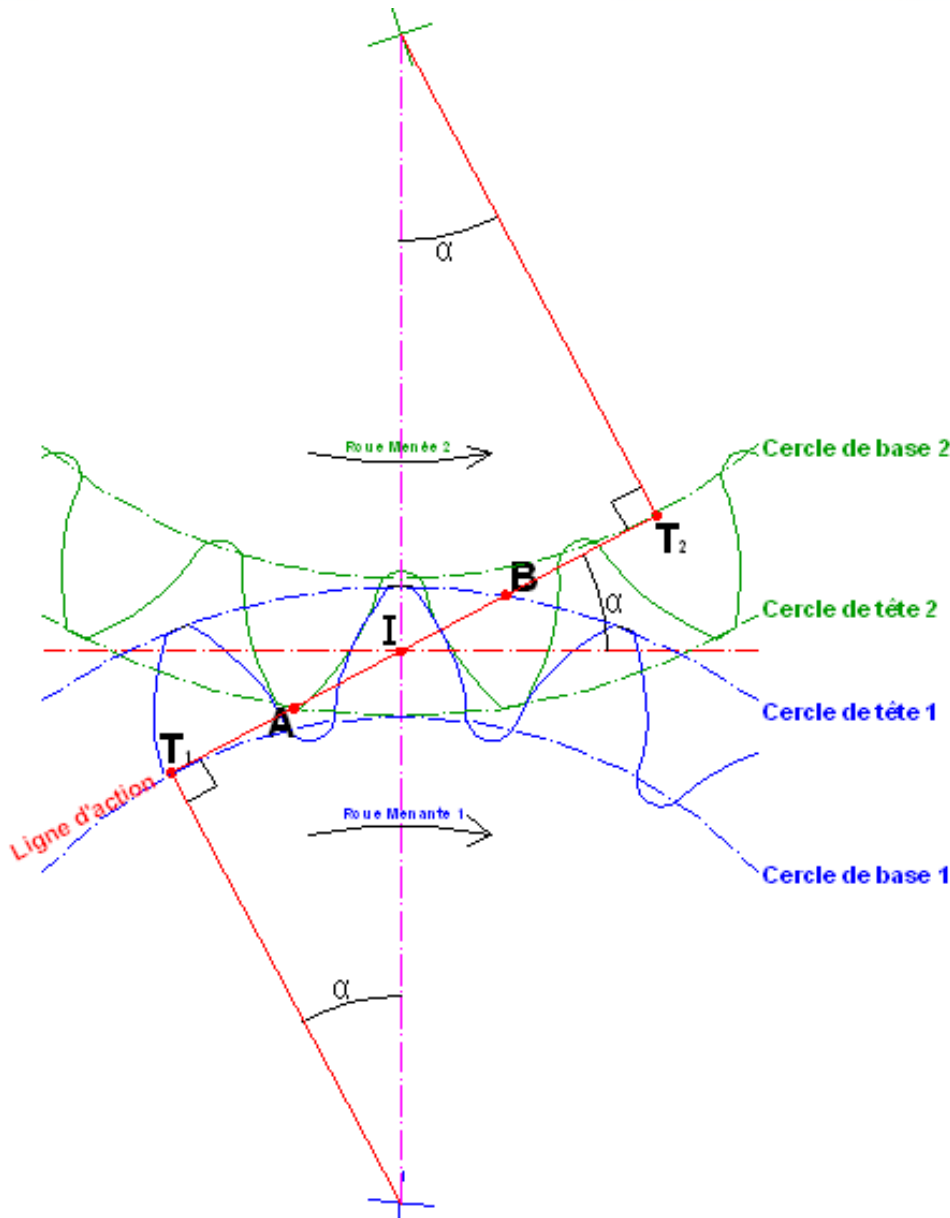
**Pour faciliter la communication l'indice 0 indiquera des dimensions relatives au taillage.**

La crémaillère normalisée a des dimensions particulières qui sont fonction du module  $m_0$  et de l'angle de pression  $\alpha_0$ . Lors du taillage d'une denture normale, la ligne de référence de la crémaillère est tangente au cercle primitif de taillage du pignon.



Pour caractériser un pignon à dentures droites en développante de cercle, il faut connaître :

- le nombre de dents  $Z$
- le module  $m$
- l'angle de pression  $\alpha$
- la largeur de denture  $b$



La longueur de conduite est la longueur  $AB$  où :

- $A$  est le début de contact entre un couple de dents à profils conjugués
- $B$  est la fin de contact entre le même couple de dents à profils conjugués

Pour assurer la continuité d'engrènement, il faut vérifier que le rapport de conduite, rapport entre la longueur de conduite et le pas de base, est compris entre 1,3 et 1,8 :

$$1,3 < \varepsilon_{\alpha} = \frac{AB}{p_b} < 1,8$$

Calcul du rapport de conduite (Valable uniquement pour les dentures droites) :

$$\varepsilon_\alpha = \frac{AB}{p_b}$$

Numérateur :

$$AB = AI + IB$$

$$AI = AT_1 - IT_1 = \sqrt{\left(\frac{d_{a1}}{2}\right)^2 - \left(\frac{d_{b1}}{2}\right)^2} - \frac{d_{b1}}{2} \cdot \tan\alpha$$

$$IB = BT_2 - IT_2 = \sqrt{\left(\frac{d_{a2}}{2}\right)^2 - \left(\frac{d_{b2}}{2}\right)^2} - \frac{d_{b2}}{2} \cdot \tan\alpha$$

Dénominateur :

$$p_b = p \cdot \cos\alpha = \pi \cdot m \cdot \cos\alpha$$

Au final :

$$\varepsilon_\alpha = \frac{\sqrt{\left(\frac{d_{a1}}{2}\right)^2 - \left(\frac{d_{b1}}{2}\right)^2} + \sqrt{\left(\frac{d_{a2}}{2}\right)^2 - \left(\frac{d_{b2}}{2}\right)^2} - \left(\frac{d_{b1}}{2} + \frac{d_{b2}}{2}\right) \cdot \tan\alpha}{\pi \cdot m \cdot \cos\alpha}$$



Les **abaques Annexe 1** permettent de trouver très rapidement la valeur du rapport de conduite  $\varepsilon_\alpha$  graphiquement.

Le rapport de conduite peut être calculé à partir de la relation empirique suivante :

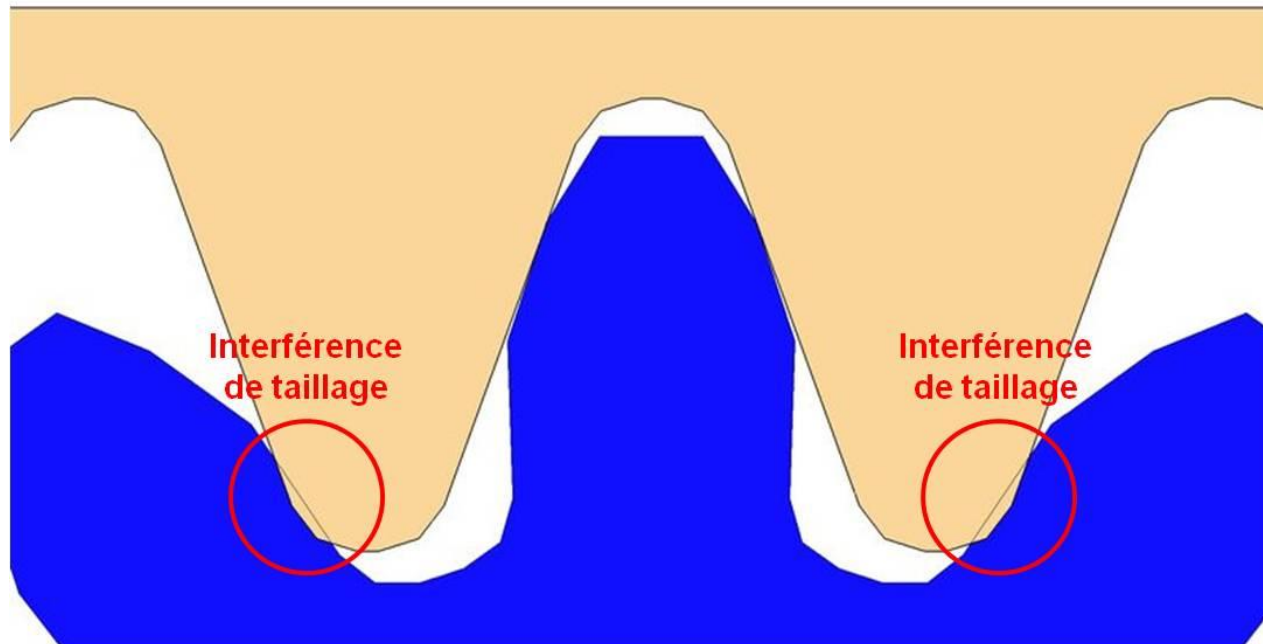
$$\varepsilon_\alpha = y_1 \cdot U_1 + y_2 \cdot U_2$$

Où :

- $y_i = \frac{h_{a_i}}{m}$  (*Attention saillie et module de fonctionnement, voir formules pp37-38*)
- $N_i = \frac{Z_i}{y_i}$  ( $N_i > 0$  pour les dentures extérieures -  $N_i < 0$  pour les dentures intérieures)
- $U_i$  est fonction de  $N_i$  (*Voir **abaques Annexe 1***)

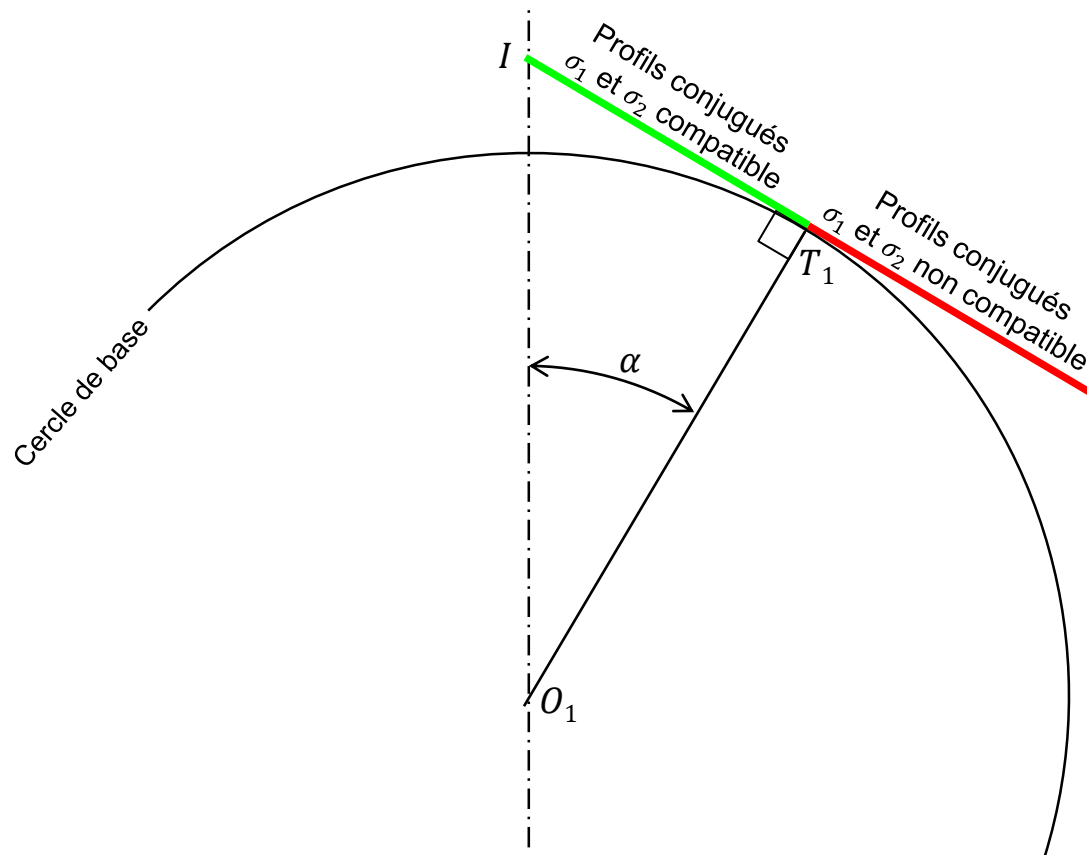
Lorsque le nombre de dents du pignon est faible, le fond de denture est étroit. L'engrènement est alors difficile puisque la tête des dents de la roue n'a pas la possibilité de se déplacer dans le fond des dents du pignon. Il y a interférence de fonctionnement.

De même lors du taillage, pour un faible nombre de dent, l'outil façonne le fond des creux en tronquant le profil de denture. C'est l'interférence de taillage. Cela fragilise considérablement le pied de dent. Cette interférence est généralement supérieure à celle de fonctionnement.



Que ce soit avec un outil pignon ou avec une crémaillère, si la taille se fait au delà du point  $T_1$ , les deux profils conjugués  $\sigma_1$  et  $\sigma_2$  ont le même sens de courbure, et les dents s'interpénètrent.

Par convention il ne faut pas tailler au delà du point  $T_1$ .



Condition à respecter :

$$m_0 < IH_1$$

$$m_0 < IT_1 \cdot \sin \alpha_0$$

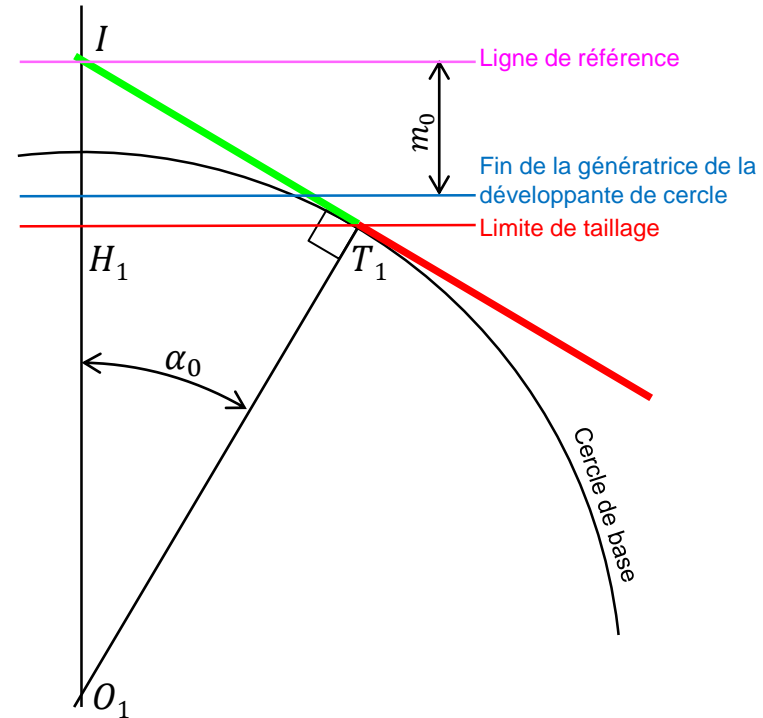
$$m_0 < (O_1I \cdot \sin \alpha_0) \cdot \sin \alpha_0$$

$$m_0 < O_1I \cdot \sin^2 \alpha_0$$

$$m_0 < \frac{d_1}{2} \cdot \sin^2 \alpha_0$$

$$m_0 < \frac{m_0 \cdot Z_1}{2} \cdot \sin^2 \alpha_0$$

$$\boxed{Z_1 > \frac{2}{\sin^2 \alpha_0}}$$



Pour  $\alpha_0 = 20^\circ$  (Valeur standard), la limite est  $Z = 17$  dents.

## Conclusion

Il n'y aura jamais d'interférence de taillage, lorsque le pignon taillé aura un nombre de dents supérieur à 17 pour un angle de pression de taillage de  $20^\circ$ .

Condition à respecter :

$$\frac{d_{a2}}{2} < O_2T_1$$

Avec :

$$d_{a2} = d_2 + 2 \cdot m_0$$

$$O_2T_1 = \sqrt{O_2T_2^2 + T_2T_1^2}$$

$$O_2T_2 = \frac{m_0 \cdot Z_2}{2} \cdot \cos \alpha_0$$

$$T_2T_1 = O_2O_1 \cdot \sin \alpha_0$$

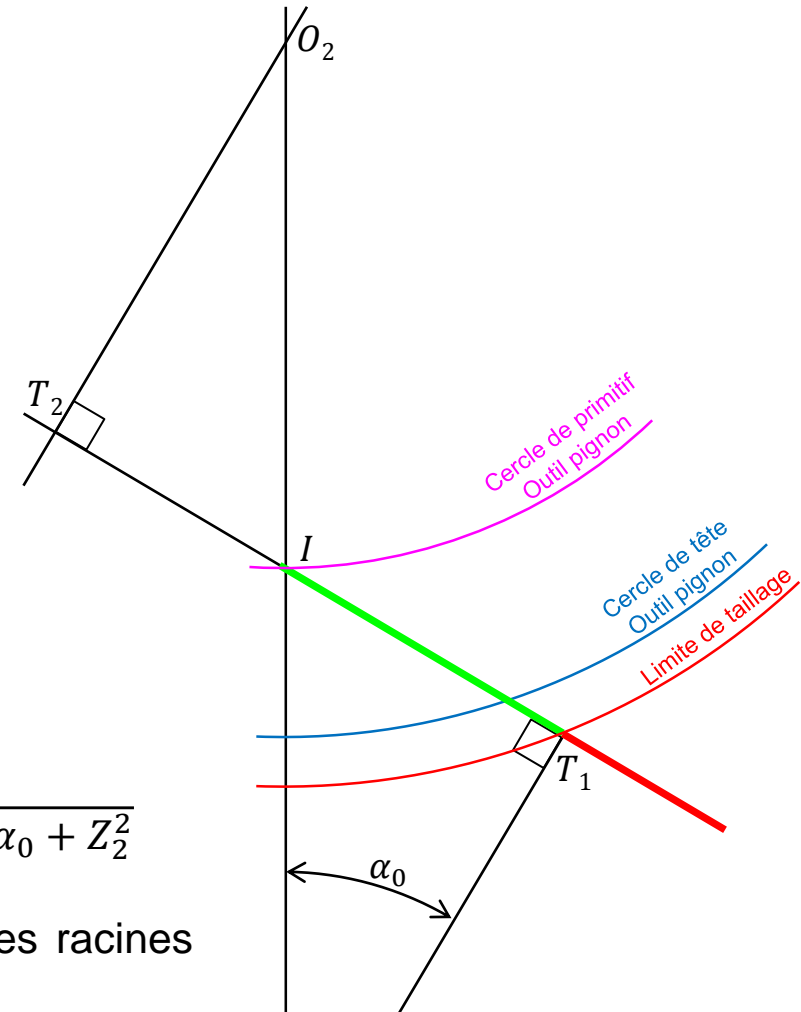
$$T_2T_1 = \frac{m_0 \cdot (Z_1 + Z_2)}{2} \cdot \sin \alpha_0$$

Au final :

$$\frac{d_{a2}}{2} < \frac{m_0}{2} \cdot \sqrt{Z_1^2 \cdot \sin^2 \alpha_0 + 2 \cdot Z_1 \cdot Z_2 \cdot \sin^2 \alpha_0 + Z_2^2}$$

Inéquation du 2ème degré en  $Z_1$ , dont les racines sont :

$$Z_1 > Z_2 + \sqrt{Z_2^2 + 4 \cdot \frac{Z_2 + 1}{\sin^2 \alpha_0}}$$



## Conclusion

Il n'y aura jamais d'interférence théorique de taillage entre le pignon 1 et l'outil pignon 2 ( $Z_2 \text{ mini} = 17 \text{ dents}$ ) si  $Z_1 > 13 \text{ dents}$ .

## Par augmentation de l'angle de pression $\alpha$

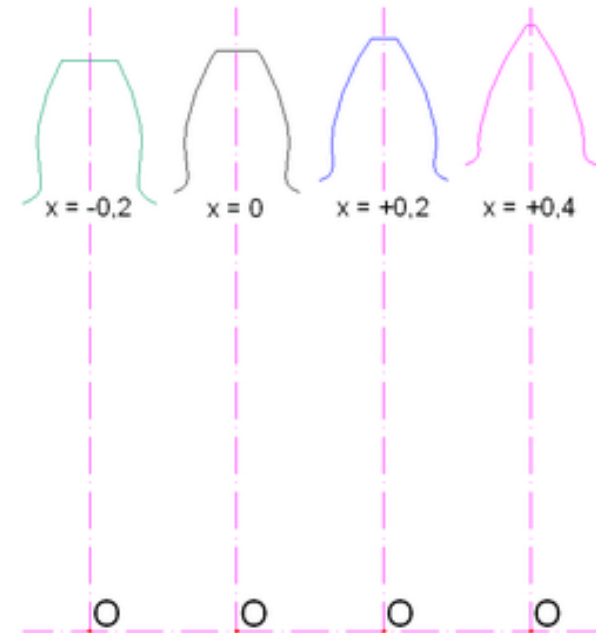
- Diminution du rapport de conduite  $\varepsilon_\alpha$
- Peu employé

## Par utilisation de denture basse : la saillie $h_a$ est inférieure à $m$

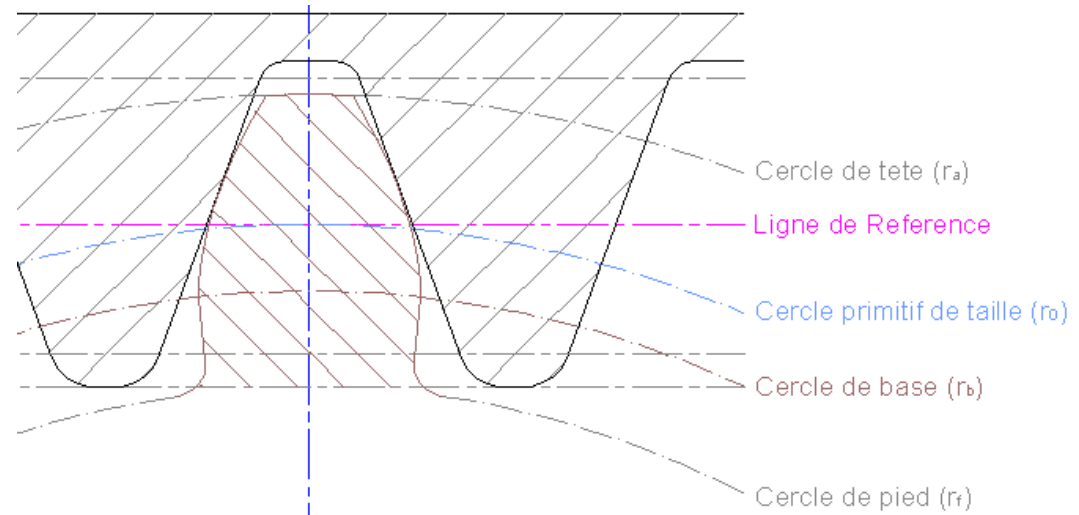
- Diminution du rapport de conduite  $\varepsilon_\alpha$
- Peu employé

## Par l'utilisation de dentures déportées

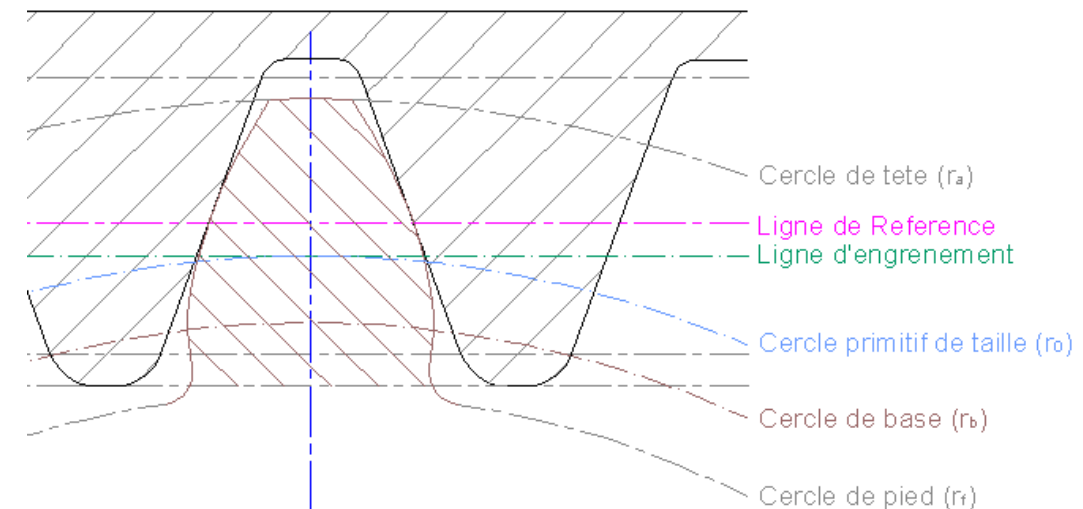
- Décalage de la ligne de référence de la crémaillère par rapport à la ligne d'engrenement
- A privilégier



La figure ci-contre en haut montre le taillage d'une denture normale sans déport. La ligne primitive de taillage est tangente à la ligne de référence de la crémaillère.



La figure ci-contre en bas montre le taillage d'une denture déportée. La ligne primitive de taillage n'est plus tangente à la ligne de référence de la crémaillère. Cette dernière est déportée de  $\delta = x \cdot m_0$ . (Ici  $x$  est positif, de l'autre coté, il serait négatif)



## En fonctionnement théorique « sans jeu »

Dans le cas d'un engrenage extérieur, il y a continuité des surfaces axoïdes associées. C'est-à-dire que la somme de l'épaisseur curviligne d'une dent de la roue et celle du pignon doit être égal au pas primitif :

$$s_1 + s_2 = \pi \cdot m$$

or 
$$s_i = d_i \cdot \left[ \frac{s_{0i}}{d_{0i}} + \text{inv}(\alpha_0) - \text{inv}(\alpha) \right]$$

$$s_i = m \cdot Z_i \cdot \left[ \frac{\frac{\pi}{2} \cdot m_0 + 2 \cdot x_i \cdot m_0 \cdot \tan \alpha_0}{m_0 \cdot Z_i} + \text{inv}(\alpha_0) - \text{inv}(\alpha) \right]$$

$$s_i = m \cdot \left[ \frac{\pi}{2} + 2 \cdot x_i \cdot \tan \alpha_0 + Z_i \cdot (\text{inv}(\alpha_0) - \text{inv}(\alpha)) \right]$$

Donc : 
$$2 \cdot (x_1 + x_2) \cdot \tan \alpha_0 + (Z_1 + Z_2) \cdot [\text{inv}(\alpha_0) - \text{inv}(\alpha)] = 0$$

C'est-à-dire : 
$$\boxed{\text{inv}(\alpha) = \text{inv}(\alpha_0) + 2 \cdot \frac{x_1 + x_2}{Z_1 + Z_2} \cdot \tan \alpha_0}$$



Le cercle de base est identique dans la phase de taillage et dans la phase de fonctionnement.

Au taillage :

$$r_{b1} = O_{01} I . \cos \alpha_0$$

$$r_{b1} = \frac{d_{01}}{2} . \cos \alpha_0$$

$$r_{b1} = \frac{m_0 . Z_1}{2} . \cos \alpha_0$$

En fonctionnement :

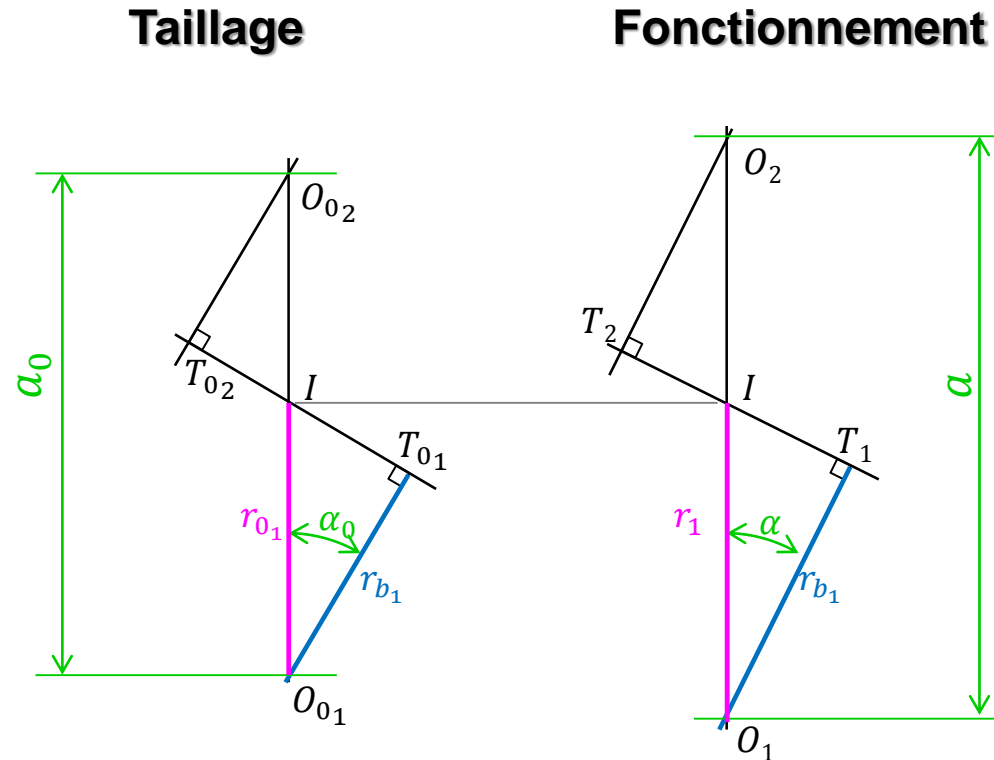
$$r_{b1} = O_1 I . \cos \alpha$$

$$r_{b1} = \frac{d_1}{2} . \cos \alpha$$

$$r_{b1} = \frac{m . Z_1}{2} . \cos \alpha$$

Par combinaison :

$$m = m_0 . \frac{\cos \alpha_0}{\cos \alpha}$$



A partir de la relation du module de fonctionnement, il vient directement l'expression de l'entraxe de fonctionnement pour les engrenages extérieurs :

$$a = a_0 \cdot \frac{\cos \alpha_0}{\cos \alpha}$$

## Remarque 1

L'entraxe de fonctionnement  $a$  sera égal à l'entraxe normal  $a_0$  si  $\alpha = \alpha_0$ , c'est à dire si  $x_1 + x_2 = 0$ .

## Remarque 2

Dans le cas des engrenages intérieurs  $s_1 + s_2 = \pi \cdot m$

C'est-à-dire  $s_1 - s_2 = \pi \cdot m - 2s_2$ , en d'autres termes  $s_1 - s_2 = 0$ .

$$inv(\alpha) = inv(\alpha_0) + 2 \cdot \frac{x_1 - x_2}{z_1 - z_2} \cdot \tan \alpha_0$$

L'entraxe de fonctionnement  $a$  sera égal à l'entraxe normal  $a_0$  si  $\alpha = \alpha_0$ , c'est à dire si  $x_1 - x_2 = 0$ .

Avec un calcul similaire au cas sans déport :

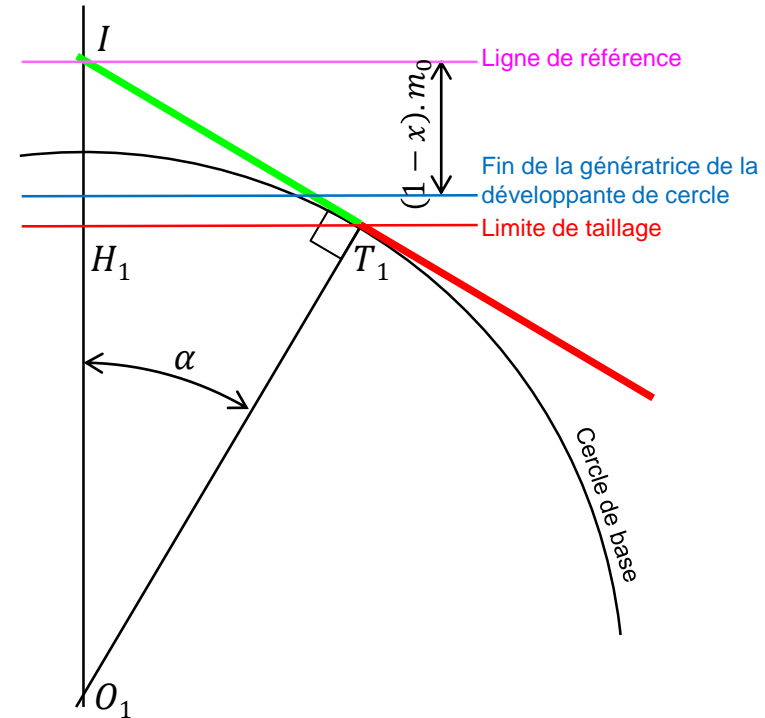
$$(1 - x).m_0 < IH_1$$

$$(1 - x).m_0 < O_1I. \sin^2 \alpha_0$$

$$(1 - x).m_0 < \frac{d_1}{2}. \sin^2 \alpha_0$$

$$(1 - x).m_0 < \frac{m_0.Z_1}{2}. \sin^2 \alpha_0$$

$$\boxed{Z_1 > \frac{2.(1-x)}{\sin^2 \alpha_0}}$$



Déport mini pour éviter l'interférence de taillage :

$$\boxed{x > 1 - \frac{Z.\sin^2 \alpha_0}{2}}$$

**Exemple** : si  $Z = 10$  dents alors  $x_{mini} = 0,41$

Avec les dentures déportées, il est possible de

- conserver l'entraxe normal ou respecter un entraxe imposé
- éviter les interférences de taillage pour un faible nombre de dents

Elles sont utilisées aussi pour :

- améliorer la résistance à la rupture des dents
- équilibrer les glissements spécifiques
- égaliser les facteurs de grippage
- Optimiser le rapport de conduite

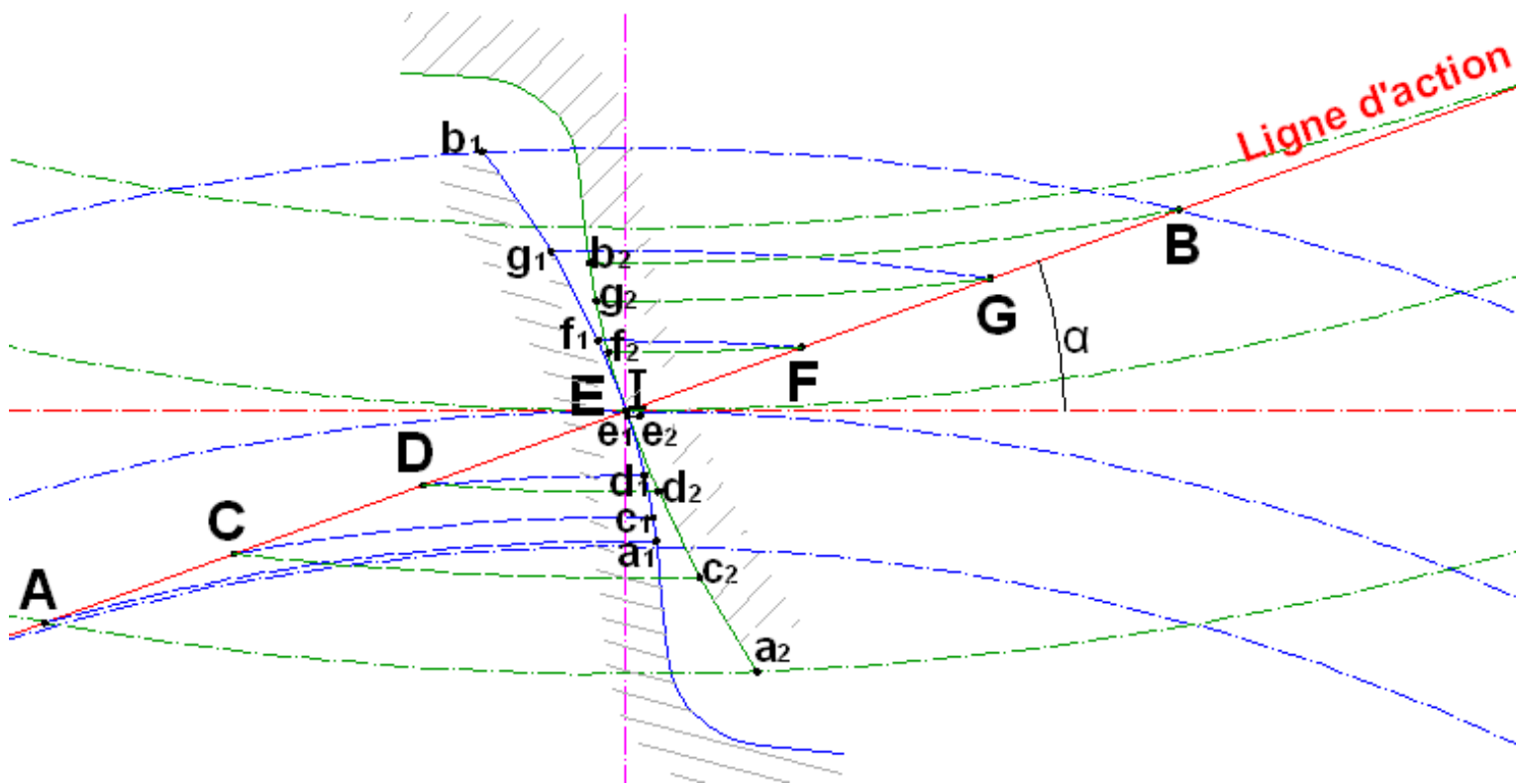
## Caractéristiques de taillage

$m_0$	<i>Module normalisé</i>	Voir tableau p25
$\alpha_0$	<i>Angle de pression normalisé</i>	20° (Valeur standard)
$p$	<i>Pas au primitif</i>	$\pi \cdot m_0$
$p_b$	<i>Pas de base (taillage et fonctionnement)</i>	$p_0 \cdot \cos \alpha_0$ ou $p \cdot \cos \alpha$
$d_{0i}$	<i>Diamètre primitif de taillage</i>	$m_0 \cdot Z_i$
$d_{bi}$	<i>Diamètre de base (taillage et fonctionnement)</i>	$d_{0i} \cdot \cos \alpha_0$ ou $d \cdot \cos \alpha$
$d_{ai}$	<i>Diamètre de tête</i>	$d_{0i} + 2 \cdot m_0 \cdot (1 + x_i)$
$d_{fi}$	<i>Diamètre de pied</i>	$d_{0i} - 2 \cdot m_0 \cdot (1,25 - x_i)$
$S_{0i}$	<i>Epaisseur curviligne au cercle primitif de taillage</i>	$\frac{\pi}{2} \cdot m_0 + 2 \cdot x_i \cdot m_0 \cdot \tan \alpha_0$
$\alpha_{ra_i}$	<i>Angle de pression de tête</i>	$\arccos \left( \frac{r_b}{r_a} \right)$
$S_{ra_i}$	<i>Epaisseur curviligne au cercle de tête</i>	$d_{ai} \cdot \left[ \frac{S_{0i}}{d_i} + \operatorname{inv}(\alpha) - \operatorname{inv}(\alpha_{ra_i}) \right]$

## Caractéristiques de fonctionnement

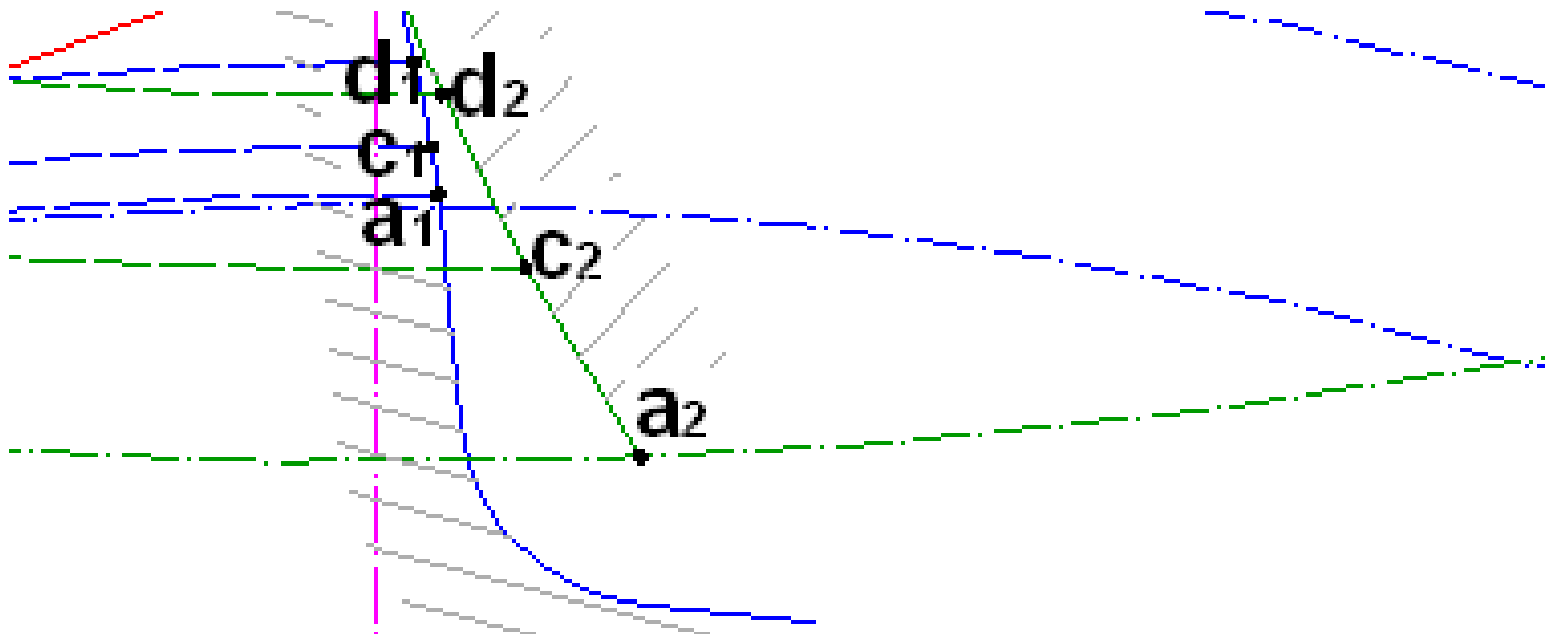
$\alpha$	<i>Angle de pression de fonctionnement</i>	$inv(\alpha) = inv(\alpha_0) + 2 \cdot \frac{x_1+x_2}{Z_1+Z_2} \cdot \tan\alpha_0$
$m$	<i>Module de fonctionnement</i>	$m_0 \cdot \frac{\cos\alpha_0}{\cos\alpha}$
$d_i$	<i>Diamètre primitif de fonctionnement</i>	$m_i \cdot Z_i$
$a$	<i>Entraxe de fonctionnement</i>	$\frac{d_1+d_2}{2}$ ou $a_0 \cdot \frac{\cos\alpha_0}{\cos\alpha}$
$s_i$	<i>Epaisseur curviligne au cercle primitif de fonctionnement</i>	$d \cdot \left[ \frac{s_0}{d_0} + inv(\alpha_0) - inv(\alpha) \right]$
$h_{a_i}$	<i>Saillie de fonctionnement</i>	$\frac{d_{a_i}-d_i}{2}$
$h_{f_i}$	<i>Creux de fonctionnement</i>	$\frac{d_i-d_{f_i}}{2}$
$\varepsilon_\alpha$	<i>Rapport de conduite</i>	$\frac{\sqrt{\left(\frac{d_{a_1}}{2}\right)^2 - \left(\frac{d_{b_1}}{2}\right)^2} + \sqrt{\left(\frac{d_{a_2}}{2}\right)^2 - \left(\frac{d_{b_2}}{2}\right)^2} - \left(\frac{d_{b_1}}{2} + \frac{d_{b_2}}{2}\right) \cdot \tan\alpha}{\pi \cdot m \cdot \cos\alpha}$

La partie utile AB est divisée en parties égales où C, D, E, F, G, sont les points frontières. Le point  $a_1$  du pignon, correspond au point  $a_2$  de la roue. Ces deux points viendront en contact au point A de la ligne d'action. Idem pour les points  $c_1, c_2$  qui viendront en contact en C, etc...



Il est facile de constater que la différence  $a_1c_1 - a_2c_2$  est plus grande que la différence  $c_1d_1 - c_2d_2$ ... Plus le point de contact est proche du point  $I$ , plus le glissement des profils l'un sur l'autre est faible.

La différence  $a_1c_1 - a_2c_2$  correspond à un glissement relatif, mais il est réparti sur un arc  $a_2c_2$  bien plus important que  $a_1c_1$ . Dans cette zone, le glissement aura donc une influence plus néfaste sur le pignon que sur la roue.





Soit  $\vec{V}_b = \vec{V}_{b,1/0} = \vec{V}_{b,2/0}$  la vitesse de déplacement de  $M$  sur la ligne d'action :

$$V_{b,1/0} = V_{M,1/0} \cdot \cos \alpha_{1M}$$

$$V_{b,1/0} = d_{b_1} \cdot \omega_{10}$$

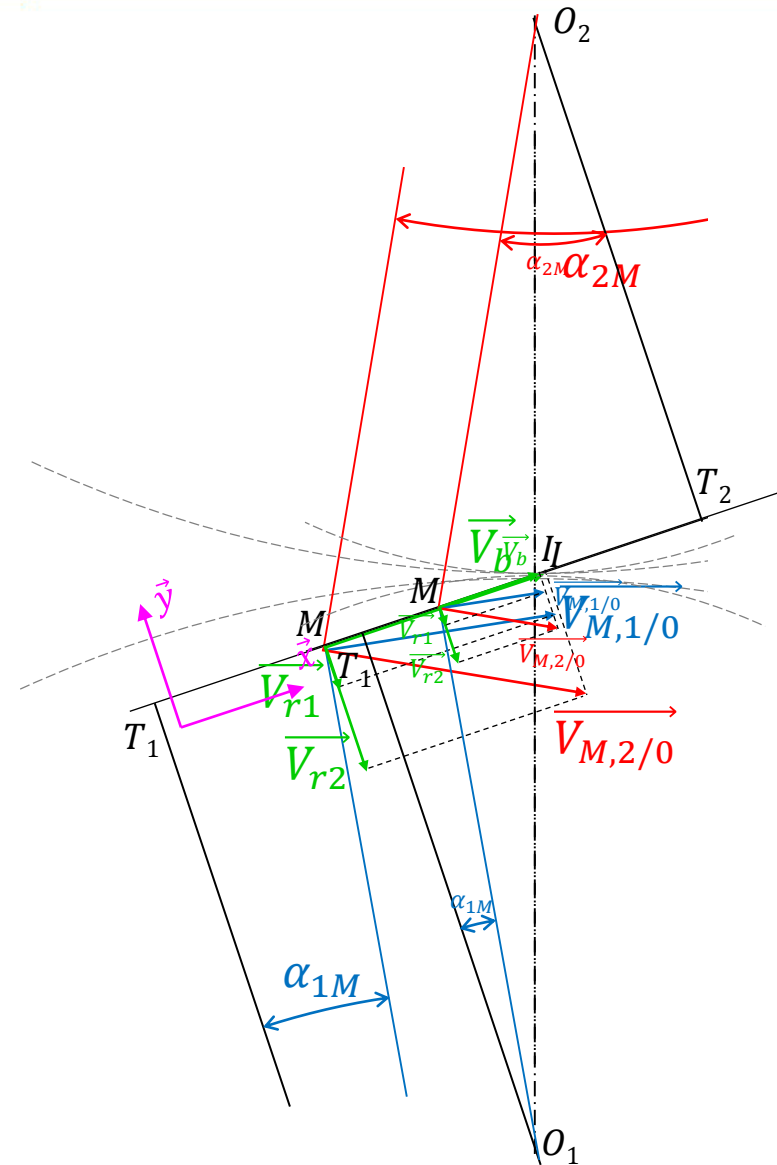
De même :

$$V_{b,2/0} = d_{b_2} \cdot \omega_{20}$$

Si  $\omega_{10}$  est constant, alors  $\omega_{20}$  est constant et  $\vec{V}_{b,2/0}$  est également constant.

Le déplacement de  $M$  sur la ligne d'action s'effectue à vitesse constante.

**La transmission est homocinéétique**



Les glissements spécifiques représentent la différence de vitesse entre pignon et roue :

- $gs_1 = \left| \frac{V_{r1} - V_{r2}}{V_{r1}} \right|$
- $gs_2 = \left| \frac{V_{r2} - V_{r1}}{V_{r2}} \right|$

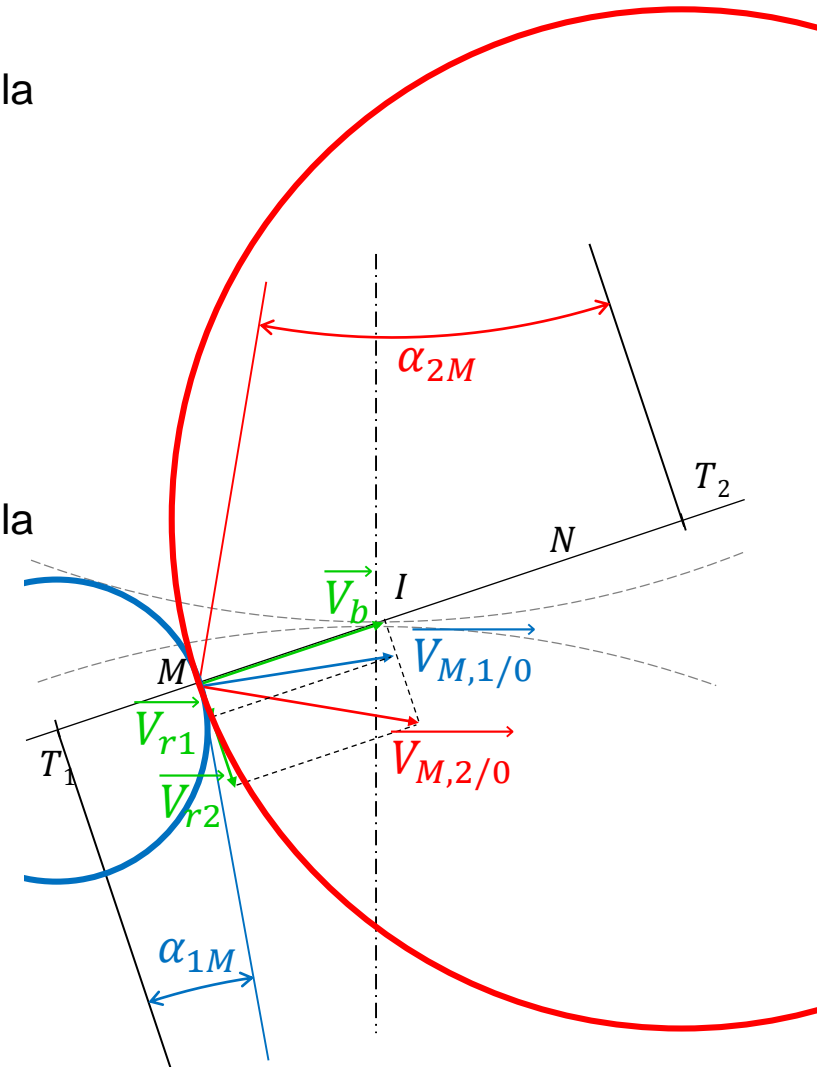
Analyse des glissements en fonction de la position du point M.

*En M*  $V_{r1} < V_{r2}$

*En T<sub>1</sub>*  $V_{r1} = 0$      $gs_1 \rightarrow \infty$      $gs_2 = 1$

*En I*  $V_{r1} = V_{r2}$      $gs_1 = 0$      $gs_2 = 0$

*En T<sub>2</sub>*  $V_{r2} = 0$      $gs_1 = 1$      $gs_2 \rightarrow \infty$

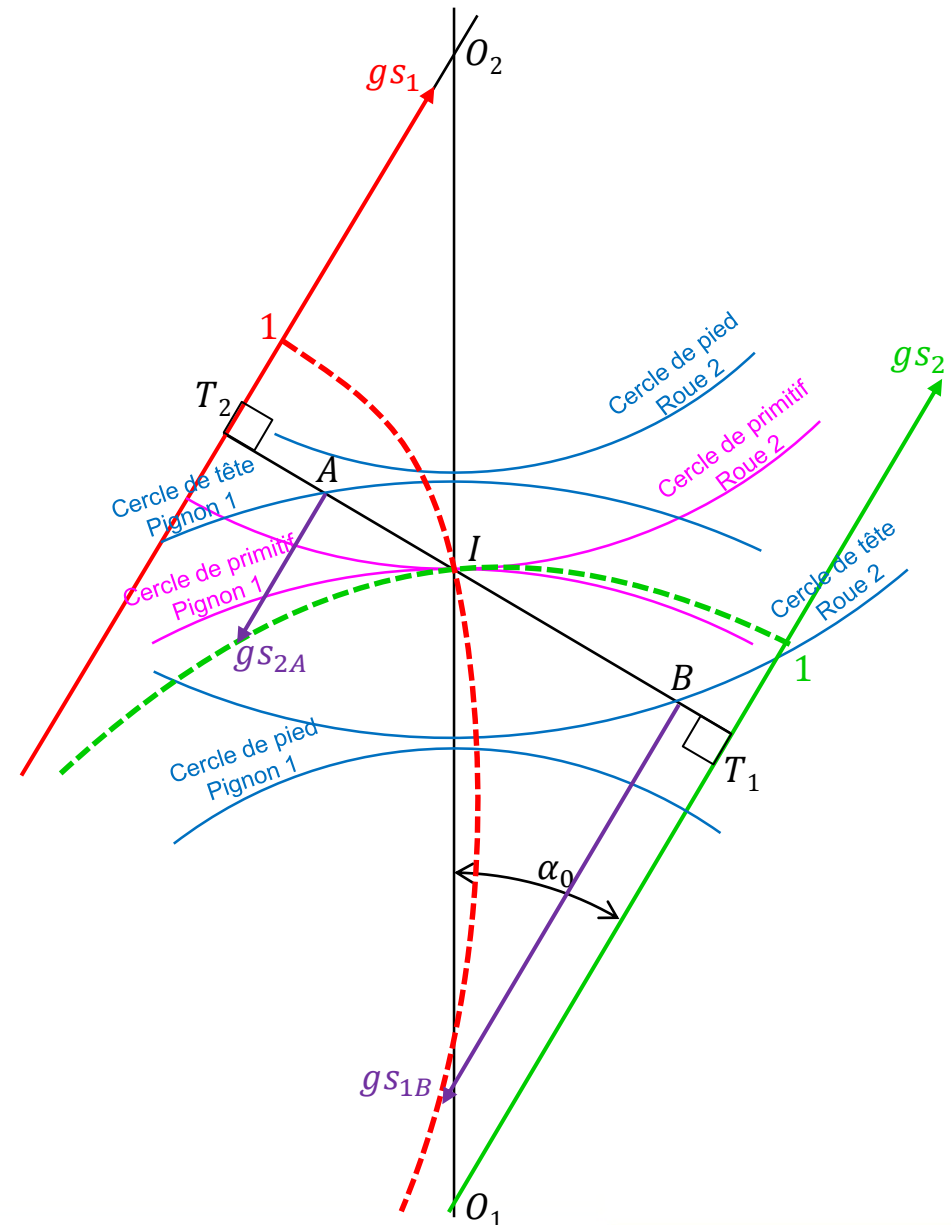


Les courbes pointillées ci-contre représentent  $gs_1$  et  $gs_2$ .

Les glissements spécifiques sont les plus importants :

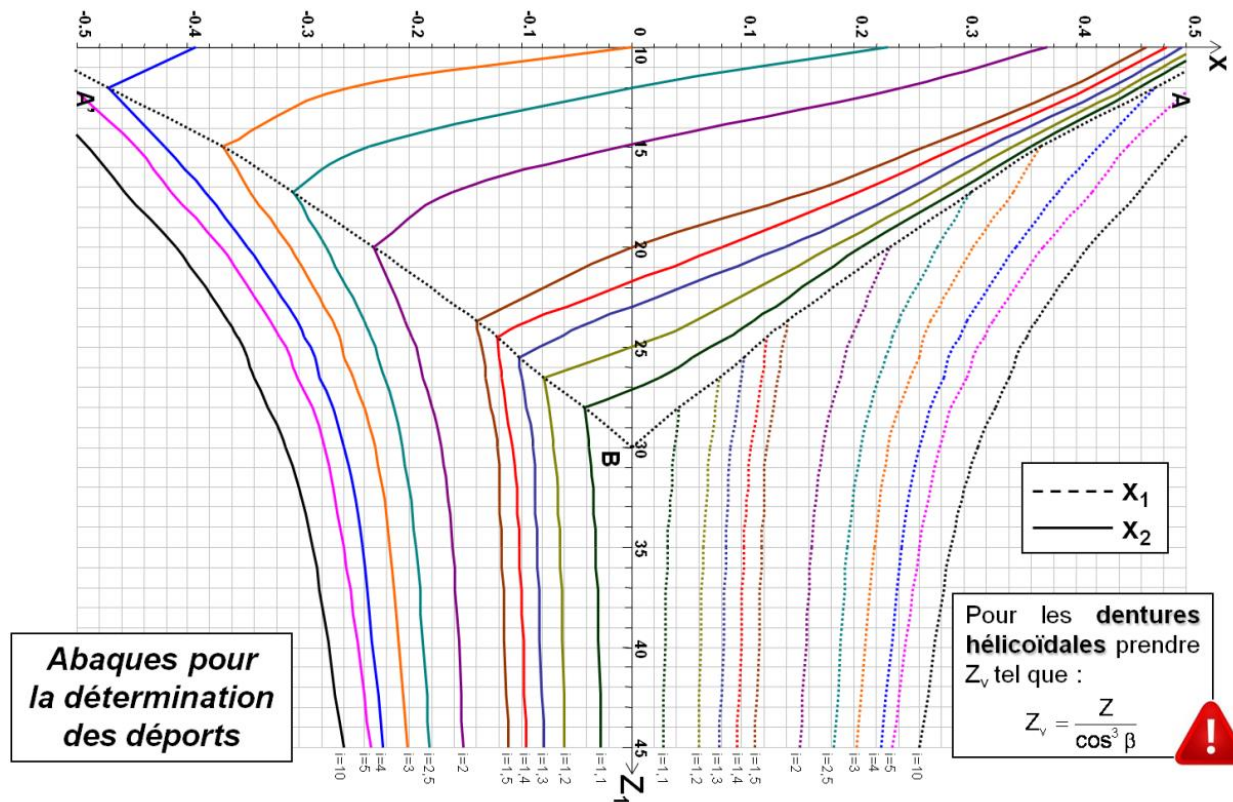
- En  $A$  pour la roue 2, au pied de la dent
- En  $B$  pour le pignon 1, au pied de la dent

Pour égaliser les glissements spécifiques, il faut centrer le segment  $[AB]$  autour du point  $I$ . C'est possible avec des déports de denture adaptés.



Les valeurs des déports de denture pour égaliser les glissements spécifiques se lisent sur les **abaques Annexe 2** dont un aperçu est ci-dessous.

Le déport est déterminé en fonction du nombre de dents du pignon et du rapport  $i = \frac{Z_2}{Z_1}$

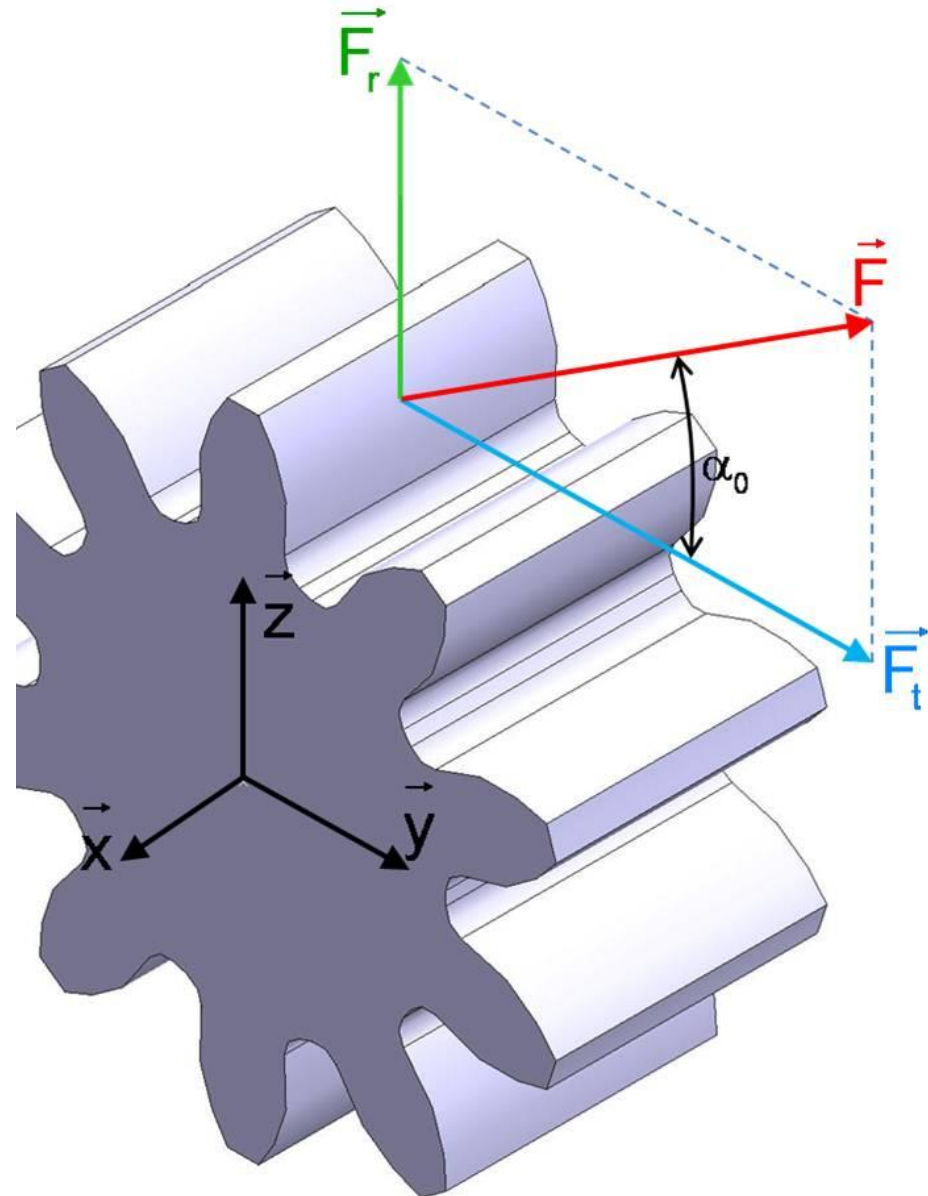


L'effort du pignon 1 sur la roue 2 est incliné de l'angle de pression ( $\alpha_0$  dans le cas du taillage -  $\alpha$  dans le cas du fonctionnement)

Il se décompose en 2 forces :

$\vec{F}_t$  : Force tangentielle (sur  $\vec{y}$ ).

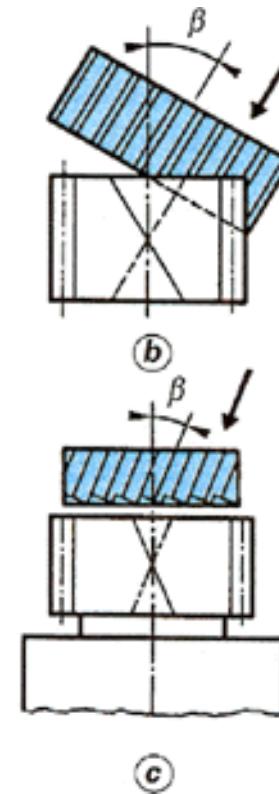
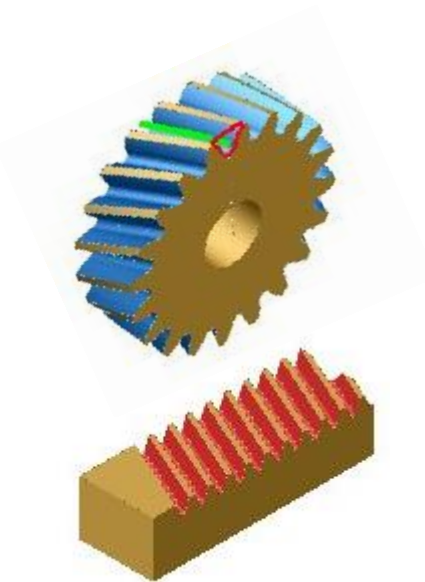
$\vec{F}_r$  : Force radiale (sur  $\vec{z}$ ) due à la forme en développante de cercle de la dent.



# Taillage d'un pignon à l'aide de la crémaillère normalisée

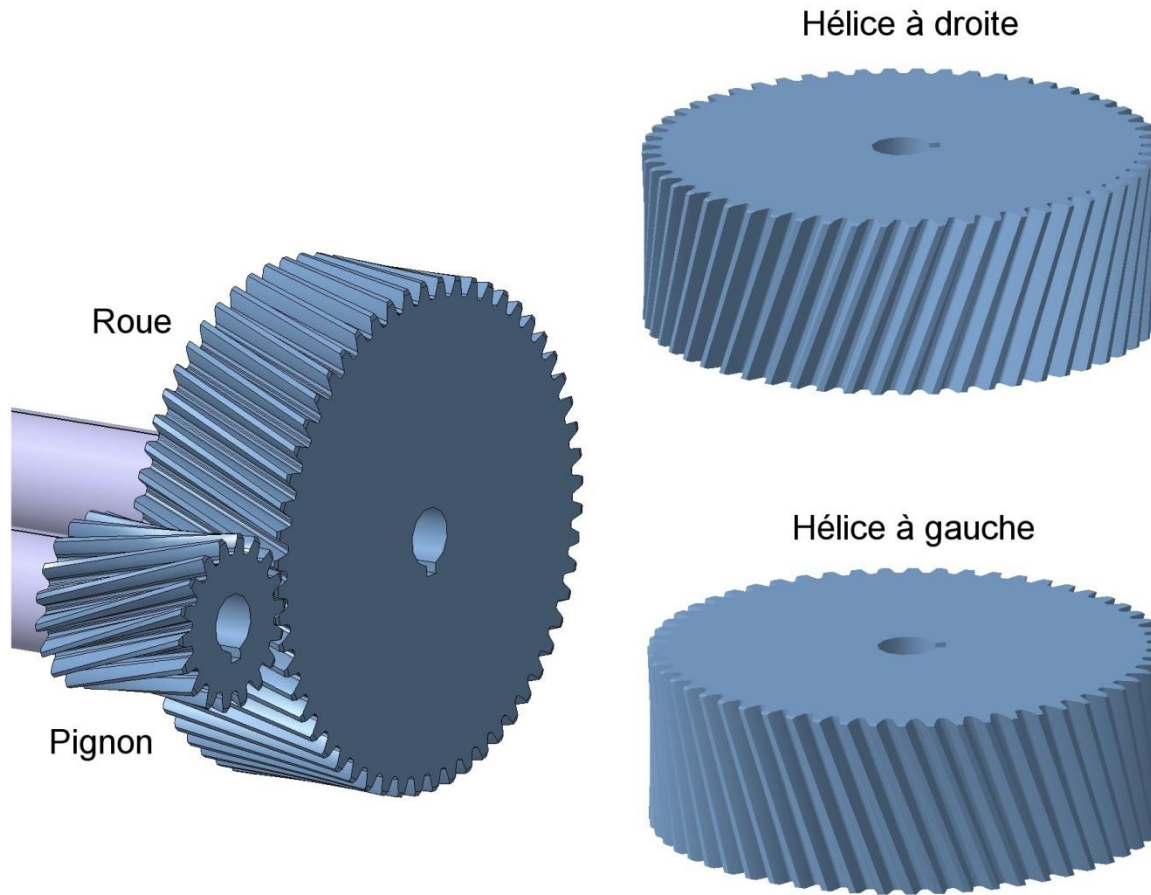
Dans la taille d'un pignon (ou d'une roue) à denture hélicoïdale, c'est une crémaillère normalisée identique aux dentures droites qui est utilisée. Elle est inclinée par rapport à l'axe du pignon d'un angle  $\beta$ .

Le contact entre les dents hélicoïdales du pignon et de la roue est alors un segment de droite incliné de l'angle  $\beta$  par rapport à l'axe du pignon.



**Remarque**

Si  $\beta_1$  sur le pignon 1 est un angle à gauche alors  $\beta_2$  sur la roue 2 est un angle à droite.

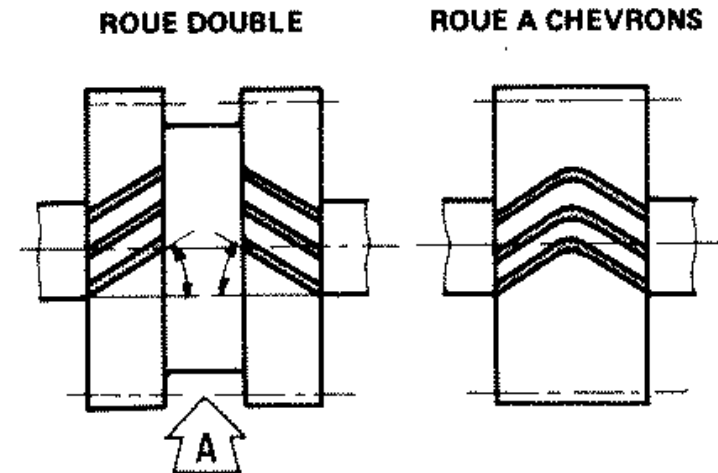


## Avantages

- Le contact entre dents est progressif
- La conduite est plus longue grâce au recouvrement.  $\varepsilon_\alpha$  augmente
- Fonctionnement sans choc, donc peu ou pas de bruit
- Si  $\beta$  varie, l'entraxe varie. Adaptation possible de l'entraxe à une valeur donnée
- La résistance des dents augmente car l'épaisseur augmente

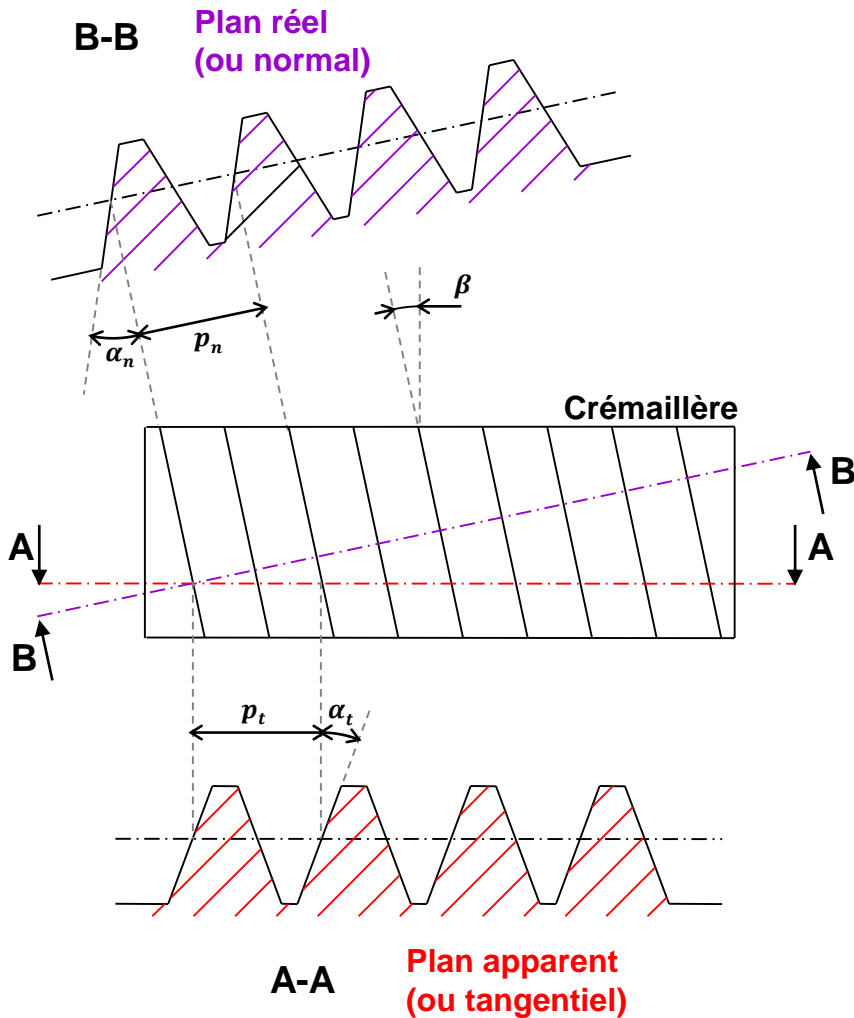
## Inconvénient

- Création d'une composante de force axiale





# Caractéristiques des dentures hélicoïdales



## Plan réel (ou normal)

$m_n$	Module normalisé	$m_0$
$\alpha_n$	Angle de pression réel normalisé	$\alpha_0$
$p_n$	Pas réel au primitif	$\pi \cdot m_n$
$p_{b_n}$	Pas de base réel	$p_n \cdot \cos \alpha_n$

## Plan apparent (ou tangentiel)

$m_t$	Module apparent	$\frac{m_n}{\cos \beta}$
$\alpha_n$	Angle de pression réel normalisé	$\arctan\left(\frac{\tan \alpha_n}{\cos \beta}\right)$
$p_n$	Pas réel au primitif	$\pi \cdot m_t$
$p_{b_n}$	Pas de base réel	$p_t \cdot \cos \alpha_t$

## Général

$d_i$	Diamètre primitif	$m_t \cdot Z_i$
$d_{b_i}$	Diamètre de base	$d_i \cdot \cos \alpha_t$
$d_{a_i}$	Diamètre de tête	$d_i + 2 \cdot m_n \cdot (1 + x_i)$
$d_{f_i}$	Diamètre de pied	$d_i - 2 \cdot m_n \cdot (1,25 - x_i)$
$a$	Entraxe	$\frac{d_1 + d_2}{2}$
$\beta_b$	Angle d'hélice de base	$\arcsin(\sin \beta \cdot \cos \alpha_n)$

L'effort du pignon 1 sur la roue 2 est incliné de l'angle de pression ( $\alpha_0$  dans le cas du taillage –  $\alpha$  dans le cas du fonctionnement) et de l'angle d'hélice  $\beta$ . Il se décompose en trois forces :

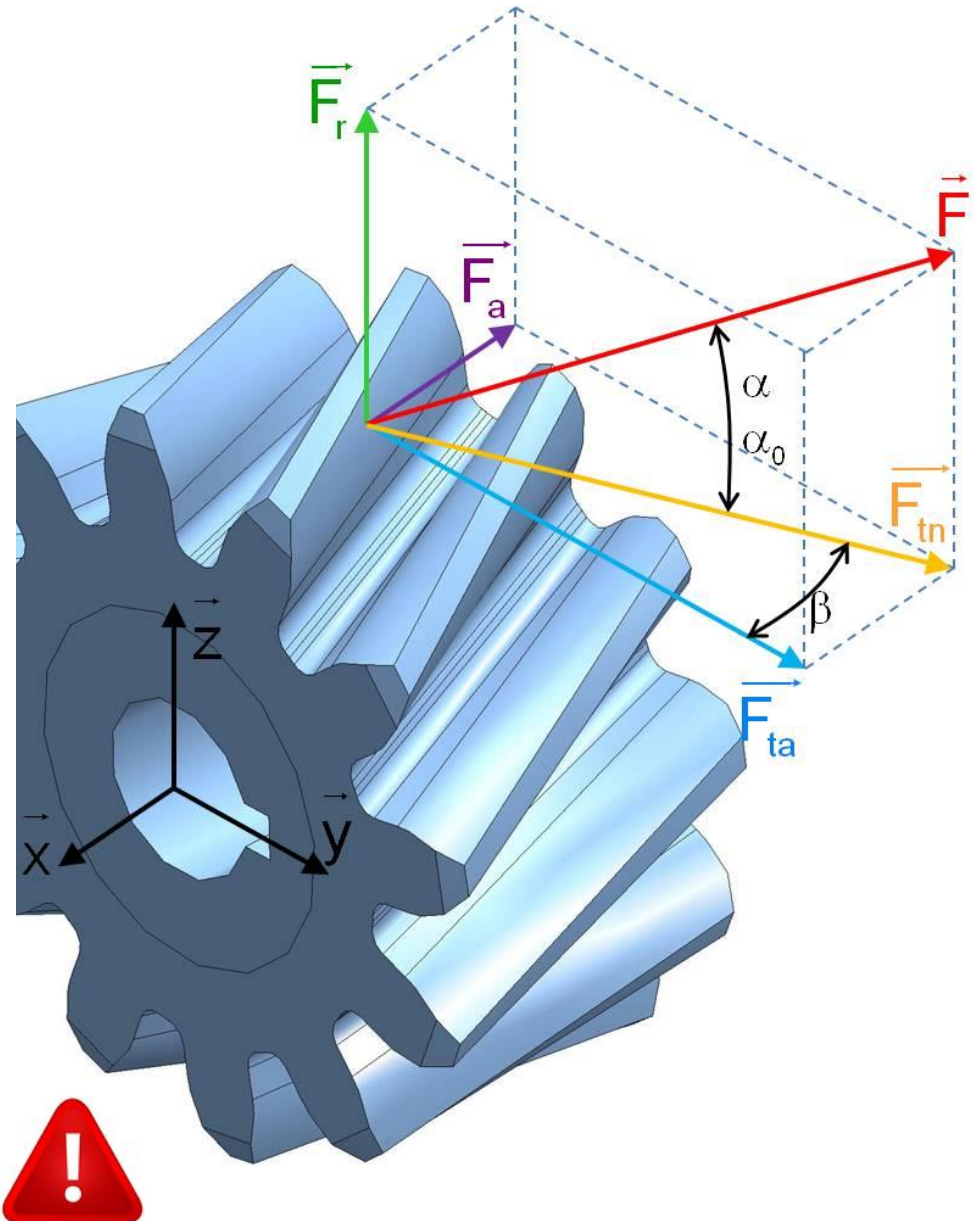
$\vec{F}_{ta}$  : Force tangentielle dans le plan apparent (sur  $\vec{y}$ )

$\vec{F}_r$  : Force radiale (sur  $\vec{z}$ ) due à la forme en développante de cercle de la dent.

$\vec{F}_a$  : force axiale (sur  $\vec{x}$ ) due à l'inclinaison de la denture hélicoïdale (Angle  $\beta$ )

### Remarque :

**Pour le dimensionnement, c'est l'effort tangentiel dans le plan normal noté  $\vec{F}_{tn}$  qu'il faut utiliser**

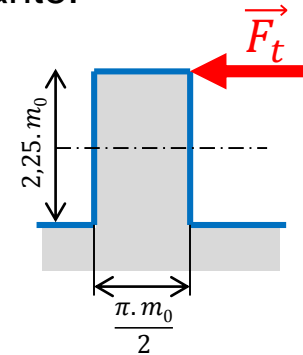


# Etude de résistance des engrenages droits à dentures droites et hélicoïdales

# Calcul de la denture à la rupture – Calcul simplifié

La dent est une poutre encastrée, considérée de section constante.

- Epaisseur à l'encastrement  $h = \frac{\pi.m_0}{2}$
- Profondeur  $b = k.m_0$
- Longueur  $L = 2,25.m_0$
- Effort tangentiel  $F_t$   
 $F_{tn}$  pour les dentures hélicoïdales



La contrainte de flexion maxi au pied de la dent vaut  $\sigma = \frac{Mf_z}{I_{Gz}} \cdot \lambda$  avec :

- $Mf_z = 2,25.m_0.F_t$
- $I_{Gz} = \frac{b.h^3}{12} = \frac{k.m_0 \cdot \left(\frac{\pi.m_0}{2}\right)^3}{12} \rightarrow \sigma = 5,47 \cdot \frac{F_t}{k.m_0^2}$
- $\lambda = \frac{\pi.m_0}{4}$

Soit la **formule du module simplifié**, où  $\sigma_p$  est la contrainte pratique admissible :

$$m_0 = 2,34 \cdot \sqrt{\frac{F_t}{k \cdot \sigma_p}}$$

Formule à utiliser pour déterminer un ordre de grandeur du module

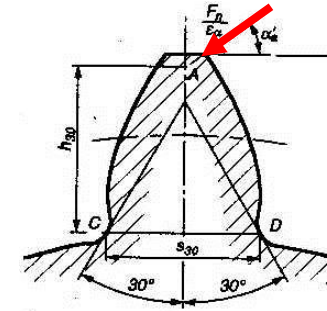
La dent est une poutre encastrée à développante de cercle. La contrainte de flexion maxi au pied de la dent vaut  $\sigma = \frac{Mf_z}{I_{Gz}} \cdot \lambda$  où :

$$Mf_z = \frac{F_n \cdot \cos \alpha_a \cdot h_{30}}{\varepsilon_\alpha}$$

$$I_{Gz} = \frac{b \cdot s_{30}^3}{12}$$

$$\lambda = \frac{s_{30}}{2}$$

$$\rightarrow \sigma = \frac{6 \cdot F_n \cdot \cos \alpha_a \cdot h_{30}}{\varepsilon_\alpha \cdot b \cdot s_{30}^2}$$



C'est une relation du type :  $\sigma = \frac{F_t}{b \cdot m_0} \cdot Y_\varepsilon \cdot Y_f \cdot Y_c \cdot Y_\beta \leq \sigma_p$

Où :

- $Y_\varepsilon$  facteur de conduite  $Y_\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon_\alpha}$
- $Y_f$  facteur de forme (voir abaques Annexe 3)
- $Y_c$  facteur de concentration de contraintes (voir abaques Annexe 4)
- $Y_\beta$  facteur d'inclinaison des dentures ( $Y_\beta = 1$  en denture droite)
- $F_t$  effort tangentiel à la denture ( $F_{tn}$  pour les dentures hélicoïdales)
- $b$  largeur de denture ( $k \cdot m_0$ )

## Ordre de grandeur de $\sigma_p$

Aciers au carbone non traités	250 – 300 MPa
Aciers alliés trempés, revenus à haute température	350 – 400 MPa
Aciers alliés trempés, revenus à basse température	450 – 550 MPa
Aciers alliés de nitruration	600 – 650 MPa
Aciers alliés de cémentation	700 – 800 MPa

Il est possible de tenir compte d'autres facteurs :

- $K_v$  : facteur de vitesse
- $K_{bl}$  : facteur de durée
- $K_M$  : facteur de portée
- $K_a$  : facteur de service

La contrainte totale est alors donnée par la relation :

$$\sigma = \frac{F_t}{b \cdot m_0} \cdot \frac{Y_\varepsilon \cdot Y_f \cdot Y_C \cdot Y_\beta}{K_v \cdot K_{bl} \cdot K_M \cdot K_a} \leq \sigma_p$$

**En première approche nous prendrons toujours  $K_a \cdot K_v \cdot K_M \cdot K_{bl} = 1$**

La pression superficielle au contact des profils de dentures est donnée par la relation :

$$p = Z_E \cdot Z_c \cdot Z_r \cdot \sqrt{\frac{F_t}{b \cdot m}} \leq p_{adm}$$

où :

- $b$  largeur de denture ( $k \cdot m_0$ )
- $m$  module de fonctionnement ( $m_t$  pour les dentures hélicoïdales)
- $F_t$  effort tangentiel sur la denture ( $F_{tn}$  pour les dentures hélicoïdales)
- $Z_E$  facteur d'élasticité des matériaux en contact (voir page suivante)
- $Z_c$  facteur géométrique (voir page suivante)
- $Z_r$  facteur de rapport (voir page suivante)

# Vérification du dimensionnement à la pression superficielle

$Z_E$  facteur d'élasticité des matériaux en contact :  $Z_E = \sqrt{\frac{2}{\pi \cdot \left( \frac{1-\nu_1^2}{E_1} + \frac{1-\nu_2^2}{E_2} \right)}}$

- $\nu_i$  coefficient de poisson de l'élément  $i$  (Métaux 0,3)
- $E_i$  module d'élasticité longitudinal de l'élément  $i$  (Acier 210 GPa)

Pour des matériaux en contact identiques  $Z_E = 0,59 \cdot \sqrt{E}$

$Z_c$  facteur géométrique :  $Z_c = \sqrt{\frac{\cos\beta_b}{\sin\alpha \cdot \cos\alpha}}$

- $\alpha$  angle de pression de fonctionnement ( $\alpha_t$  pour les dentures hélicoïdales)
- $\beta_b$  angle d'inclinaison de l'hélice de base

$Z_r$  facteur de rapport :  $Z_r = \sqrt{\frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2}}$

- $Z_i$  nombre de dents du pignon et de la roue



## Ordre de grandeur de $p_{adm}$

Fontes	350 – 600 MPa
Aciers au carbone non traités	600 – 800 MPa
Aciers alliés trempés, revenus à haute température	800 – 1200 MPa
Aciers alliés trempés, revenus à basse température	1000 – 1300 MPa
Aciers alliés de nitruration	1300 – 1600 MPa
Aciers alliés de cémentation	1400 – 1700 MPa

# Annexes

- 1 - Abaques pour le calcul de  $\varepsilon_\alpha$
- 2 - Abaques pour la détermination des dépôts  $x_i$
- 3 - Abaques pour le calcul de  $Y_f$
- 4 - Abaques pour le calcul de  $Y_c$  et  $Y_\beta$

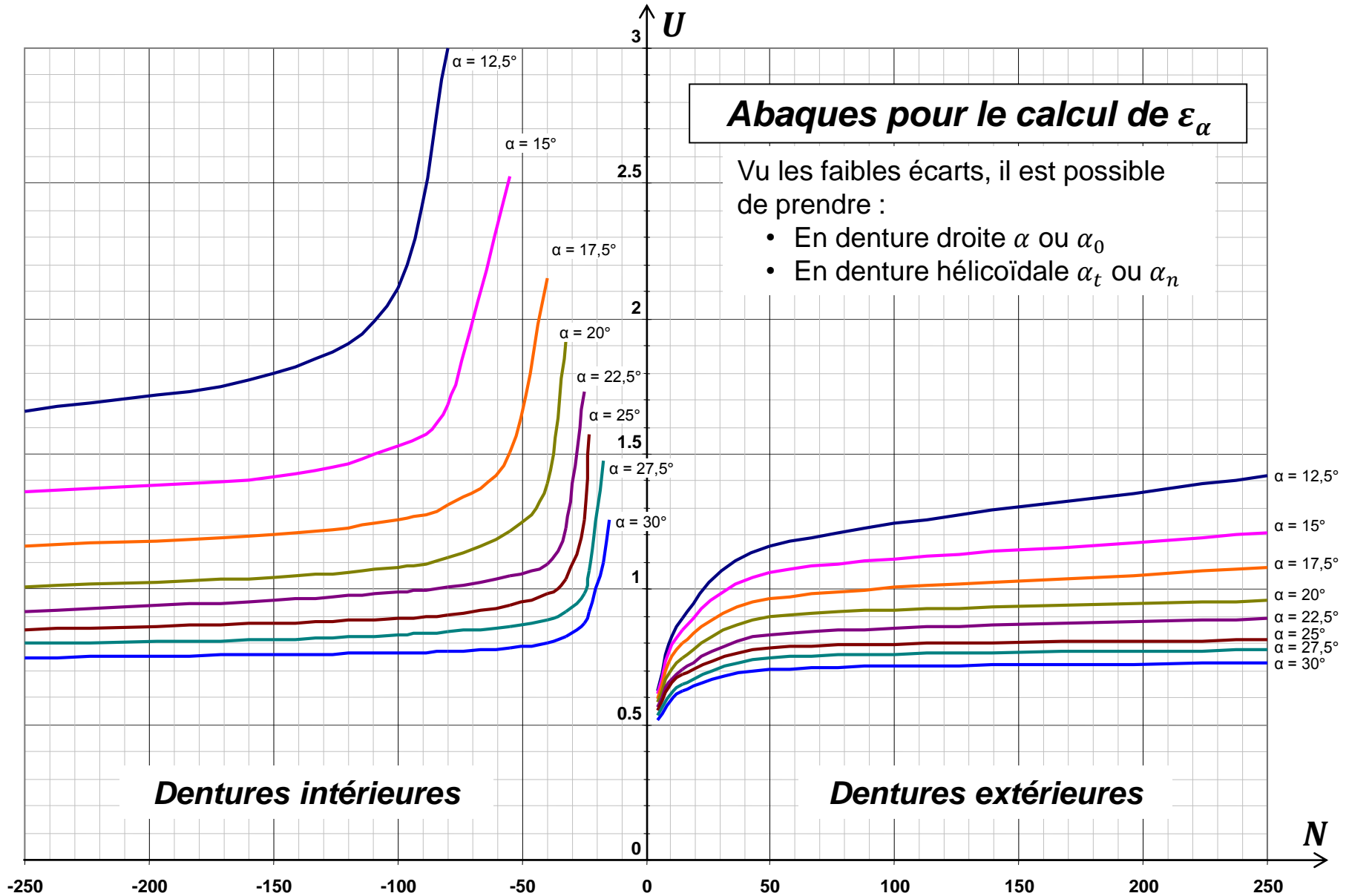
Les **abaques Annexe 1** permettent de trouver très rapidement la valeur du rapport de conduite  $\varepsilon_\alpha$  graphiquement.

Le rapport de conduite peut être calculé à partir de la relation empirique suivante :

$$\varepsilon_\alpha = y_1 \cdot U_1 + y_2 \cdot U_2$$

Où :

- $y_i = \frac{h_{a_i}}{m}$  (*Attention saillie et module de fonctionnement, voir formules pp37-38*)
- $N_i = \frac{Z_i}{y_i}$  ( $N_i > 0$  pour les dentures extérieures -  $N_i < 0$  pour les dentures intérieures)
- $U_i$  est fonction de  $N_i$  (*Voir abaques page suivante*)



La courbe ci après s'utilise différemment selon le nombre total de dent. Il y a deux utilisations possibles dont la frontière sur les abaques est la ligne  $ABA'$ .

Le rapport  $i$  est défini par :  $i = \frac{Z_2}{Z_1}$

Pour  $Z_1 + Z_2 \geq 60$  correction sans variation d'entraxe

- $Z_1 = 20$  et  $i = 3$        $x_1 = +0,31$        $x_2 = -0,31$
- $Z_1 = 17$  et  $i = 5,3$        $x_1 = +0,41$        $x_2 = -0,41$

Pour  $Z_1 + Z_2 < 60$  correction avec variation d'entraxe

$x_1$  donné par la courbe  $AB$  (ligne frontière)

$x_2$  donné par la courbe correspondant à  $i$ , à l'intérieur du triangle  $ABA'$

- $Z_1 = 20$  et  $Z_2 = 24$  ( $i = 1,2$ )       $x_1 = +0,23$        $x_2 = +0,17$
- $Z_1 = 20$  et  $Z_2 = 30$  ( $i = 1,5$ )       $x_1 = +0,23$        $x_2 = 0$

Pour les dentures hélicoïdales prendre  $Z_v$  tel que :

$$Z_v = \frac{Z}{\cos^3 \beta}$$

